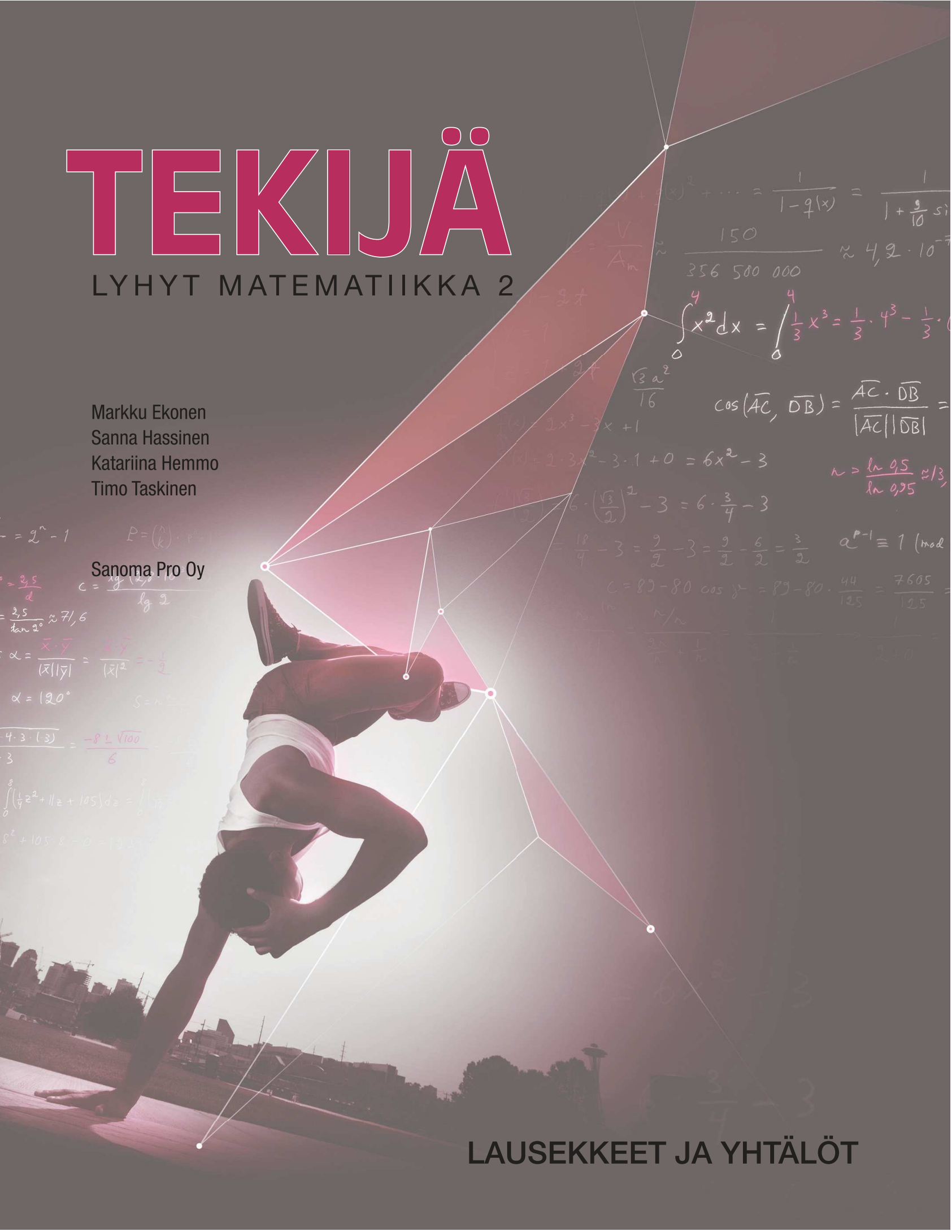
# TEKIJÄ

## LYHYT MATEMATIIKKA 2

Markku Ekonen
Sanna Hassinen
Katariina Hemmo
Timo Taskinen

Sanoma Pro Oy



## LAUSEKKEET JA YHTÄLÖT

**Tiedustelut**
Sanoma Pro Oy, Helsinki
puh. 020 391 000
sähköposti: asiakaspalvelu@sanomapro.fi

www.sanomapro.fi

Kustantaja: Sanoma Pro Oy
1.–3. painos, 2017

Tämä aineisto on digitaalinen rinnakkaisversio tuotteesta
Tekijä Lyhyt matematiikka 2 Lausekkeet ja yhtälöt ISBN 978-952-63-3897-2

6 kk lisenssi ISBN 978-952-63-3899-6
48 kk lisenssi ISBN 978-952-63-3900-9

Toimitus: Sanna Niemelä
Ulkoasu: Liisa Holm
Taitto: Juho Niemelä
Piirrokset: Juho Niemelä
Valokuvat: iStockphoto
Kansi: Vaidas Bagonas, Sari Jeskanen

© Markku Ekonen, Sanna Hassinen, Katariina Hemmo, Timo Taskinen ja Sanoma Pro Oy

**Kopiointiehdot**
Tämä teos on digitaalinen oppikirja, joka on suojattu tekijänoikeuslailla (404/61).

# Sisällys


**1 Lausekkeilla laskeminen** . . . . . **7**
1.1 Lauseke ja laskutoimitukset . . . . . 8
1.2 Polynomien tulo . . . . . 20

**2 Yhtälöitä ja funktioita** . . . . . **29**
2.1 Ensimmäisen asteen yhtälö . . . . . 30
2.2 Ensimmäisen asteen polynomifunktio . . . . . 41
2.3 Toisen asteen yhtälö . . . . . 53
2.4 Toisen asteen polynomifunktio . . . . . 65

**3 Yhtälöpari** . . . . . **83**
3.1 Yhtälöpari ja leikkauspisteet . . . . . 84
3.2 Yhtälöpari sovellustehtävissä . . . . . 95

**4 Verrannollisuus** . . . . . **104**
4.1 Suhde ja verranto . . . . . 105
4.2 Suoraan verrannollisuus . . . . . 116
4.3 Kääntäen verrannollisuus . . . . . 129

**5 Lisämateriaali** . . . . . **140**
5.1 Murtolausekkeita . . . . . 140
5.2 Muistikaavat . . . . . 146
5.3 Vastauksen tarkkuus . . . . . 149
5.4 Neliöjuuri . . . . . 153

**6 Kertaus: Lausekkeet ja yhtälöt** . . . . . **157**
6.1 Kurssin keskeiset asiat . . . . . 158
6.2 Matemaattisia malleja . . . . . 166
6.3 Monivalintatehtävät . . . . . 177

**Vastaukset** . . . . . **181**

**Hakemisto** . . . . . **190**

# Kirjan käyttäjälle

## Tavoitteet

Matematiikan opetuksen ja erityisesti oppikirjan tärkeä tehtävä on, että opiskelija saa myönteisiä oppimiskokemuksia matematiikan parissa työskennellessään, oppii luottamaan omiin kykyihinsä, taitoihinsa ja ajatteluunsa sekä rohkaistuu kokeilevaan, tutkivaan ja keksivään oppimiseen.

Lukion opetussuunnitelma asettaa lyhyen matematiikan opetukselle monia tavoitteita. Opiskelijan on esimerkiksi osattava käyttää matematiikkaa jokapäiväisen elämän ja yhteiskunnallisen toiminnan apuvälineenä. Nopeasti muuttuvassa maailmassa täytyy pystyä vastaanottamaan ja analysoimaan viestimien matemaattisessa muodossa tarjoamaa informaatiota ja arvioimaan sen luotettavuutta.

Lukiolaisen on hankittava sellaisia matemaattisia tietoja, taitoja ja valmiuksia, jotka antavat riittävän pohjan jatko-opinnoille. Matemaattisten tietojen ja taitojen lisäksi on opittava käyttämään tarkoituksenmukaisia teknisiä apuvälineitä ja tietolähteitä.

Opetussuunnitelman mukaan kurssin ”Lausekkeet ja yhtälöt” tavoitteena on, että opiskelija

- harjaantuu käyttämään matematiikkaa jokapäiväisen elämän ongelmien ratkaisemisessa ja oppii luottamaan omiin matemaattisiin kykyihinsä
- ymmärtää lineaarisen riippuvuuden, verrannollisuuden ja toisen asteen polynomifunktion käsitteet
- vahvistaa yhtälöiden ratkaisemisen taitojaan ja oppii ratkaisemaan toisen asteen yhtälöitä
- osaa käyttää teknisiä apuvälineitä polynomifunktion tutkimisessa ja polynomiyhtälöihin sekä polynomifunktioihin liittyvien sovellusongelmien ratkaisussa.

## Kirjan rakenne

Lyhyt Tekijä -sarjassa on monia ratkaisuja, jotka tukevat opiskelijaa opetussuunnitelman tavoitteiden saavuttamisessa.

- Jokaisen pääluvun alussa on kaavio, jossa esitellään keskeiset tavoitteet. Sen lisäksi kaaviossa kerrotaan, mitkä asiat opiskelijan tulisi hallita ilman apuvälinettä ja mitkä asiat on osattava apuvälineen kanssa.

Pohdinta

- Luvut alkavat pohdinnoilla. Niiden tarkoitus on johdatella tunnin aiheeseen.

E1

- Kirjan jokaiseen esimerkkiin liittyy tehtäväosiossa vastaavantyyppinen tehtävä. Nämä tehtävät on selkeästi merkitty symbolilla. Tämä helpottaa esimerkiksi itsenäistä opiskelua.

123.

- Vaativammat tehtävät on merkitty väripohjalla. Ne voivat olla joko laskintehtäviä tai ilman laskinta laskettavia tehtäviä.

Lisämateriaali: Murtolausekkeita s. 140

- Kurssiin liittyvä lisämateriaali on koottu omaksi pääluvuksi. Teoriaosassa on viittauksia tähän lukuun.

Matematiikan ylioppilaskokeessa osa tehtävistä ratkaistaan ilman teknistä apuvälinettä, osa teknisen apuvälineen kanssa. Apuvälineellä tarkoitetaan tietokonetta tai laskinta. Tämä jaottelu on otettu huomioon myös oppikirjassa.

- Osa esimerkeistä on ratkaistu ilman laskinta. Vastaavasti osa tehtävistä on tarkoitus ratkaista ilman mitään apuvälinettä.

- Esimerkit ja tehtävät, joiden ratkaisussa on tarkoitus käyttää laskinta tai tietokonetta, on merkitty omalla symbolilla.

**Kun kirjan esimerkeissä ja tehtävissä viitataan laskimeen, tällä tarkoitetaan minkä tahansa tehtävän ratkaisemiseen sopivan teknisen apuvälineen käyttöä.**

**Laskimen tai muun apuvälineen käyttö**

Luvuissa on huomioitu teknisen apuvälineen tarjoamat mahdollisuudet ohjelaatikoiden avulla. Niissä kerrotaan, millaisia toimintoja tehtävän ratkaisemisen avuksi esimerkiksi laskimista voi löytyä.

# 1 Lausekkeilla laskeminen

## Tavoitteena on

- kerrata ja vahvistaa polynomeilla laskemisen taitoja
- oppia muodostamaan sanallisissa tehtävissä lausekkeita
- oppia käyttämään laskinta polynomien lausekkeiden käsittelyssä.

- Miten lasketaan polynomin arvo?
- Miten suoritetaan polynomien laskutoimitukset?
  - yhteenlasku
  - vähennyslasku
  - monomilla kertominen
  - kahden polynomin tulo
- Miten muodostetaan sanallisissa tehtävissä tilannetta kuvaava lauseke?

- Miten laskimella sievennetään lausekkeita?
- Mikä on yksinkertaisin tapa laskea polynomin arvo?
- Miten lausekkeita voidaan tallentaa laskimen muistiin?

# 1.1 Lauseke ja laskutoimitukset

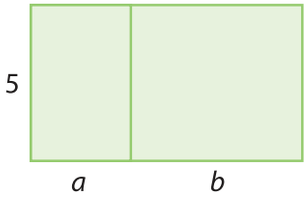
**Pohdinta**

**a)** Tutki seuraavia laskutoimituksia. Merkitse (×) ne laskutoimitukset, jotka on mahdollista laskea.

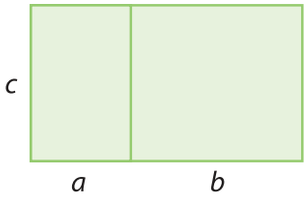
| | |
|---|---|
| 4 kg – 3 kg | |
| 4 kg – 3 € | |
| $4x - 3y$ | |

| | |
|---|---|
| $50\ \text{m}^2 + 9\ \text{m}^2$ | |
| $50\ \text{m}^2 + 9\ \text{m}$ | |
| $50x^2 + 9x$ | |

**b)** Suorakulmion korkeus on 5 yksikköä. Määritä suorakulmion pinta-ala (kannan ja korkeuden tulo) kahdella eri tavalla.




**c)** Määritä suorakulmion pinta-alan lauseke edellä mainituilla kahdella tavalla, kun korkeus on $c$. Aseta pinta-alan lausekkeet yhtä suuriksi.



nopeus · aika = matka

Kun autolla ajetaan vakionopeudella, kuljettu matka voidaan laskea kertomalla nopeus matkaan käytetyllä ajalla.

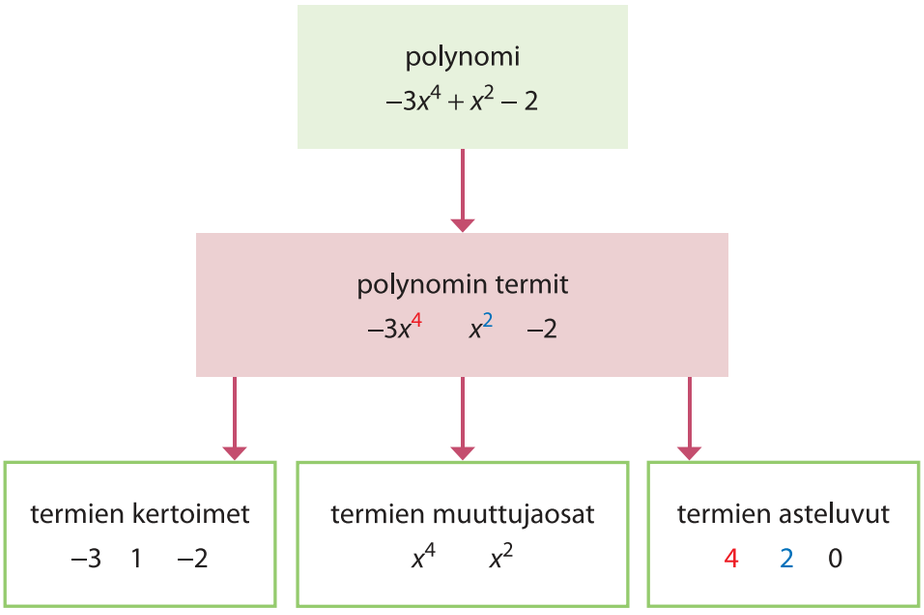
| Nopeus (km/h) | Aika (h) | Matka (km) |
|---|---|---|
| 100 | 1 | 100 · 1 |
| | 5 | 100 · 5 |
| | $x$ | 100 · $x$ |

$100x$ on kuljetun matkan **lauseke**. Matematiikassa lauseke voi olla pelkkä luku tai kirjain tai näiden avulla merkitty laskutoimitus.

Kuljetun matkan lausekkeessa $100x$ kirjaimen lukuarvo voi muuttua riippuen siitä, kuinka monta tuntia vakionopeudella ajetaan. Jos kirjaimen lukuarvo voi muuttua, kirjainta sanotaan **muuttujaksi**.

Lausekkeista osa luokitellaan **polynomeiksi**. Polynomi on summalauseke, jonka yhteenlaskettavia kutsutaan **termeiksi**. Jokainen termi koostuu **kertoimesta** ja **muuttujaosasta** (kirjainosasta). Polynomin muuttujaosan eksponentti on positiivinen kokonaisluku tai nolla. Jos muuttujaosan eksponentti on nolla, niin termi on pelkkä luku eli **vakiotermi**.

Termin muuttujaosan eksponentti on **termin asteluku**. Korkeinta astetta olevan termin asteluku on **polynomin asteluku**.



Polynomeja nimetään yleensä isoilla kirjaimilla. Esimerkiksi polynomi $-3x^4 + x^2 - 2$ voidaan nimetä kirjaimella $P$.

$$P(x) = -3x^4 + x^2 - 2$$

polynomin nimi — polynomin muuttuja

Polynomeja voidaan luokitella polynomin asteluvun tai termien lukumäärän mukaan. Polynomissa $P(x) = -3x^4 + x^2 - 2$ on kolme termiä. Kolmitermistä polynomia sanotaan **trinomiksi**. Kaksiterminen polynomi on **binomi** ja yksiterminen **monomi**. Polynomilla, jolla on termejä enemmän kuin kolme, ei ole erityistä nimeä.

Kun lausekkeessa esiintyvän muuttuja paikalle asetetaan jokin lukuarvo ja suoritetaan merkityt laskutoimitukset, saadaan **lausekkeen arvo**.

| | **Lausekkeen arvo, kun $x = -1$.** |
|---|---|
| Lauseke $P(x) = -3x^4 + x^2 - 2$ | $P(-1) = -3 \cdot (-1)^4 + (-1)^2 - 2 = -4$ |

**ESIMERKKI 1**

**a)** Laske polynomin $Q(x) = 3x^2 + x$ arvo, kun $x = -2$.

**b)** Laske lausekkeen $a^3 - 3a - b$ arvo, kun $a = \frac{1}{2}$ ja $b = -1$.

**RATKAISU**

**a)** Sijoitetaan $-2$ muuttujan $x$ paikalle ja lasketaan merkityt laskutoimitukset.

$$Q(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + (-2) = 3 \cdot 4 - 2 = 10$$

Negatiivinen luku merkitään sulkuihin.

**b)** Lausekkeessa on kaksi muuttujaa. Sijoitetaan muuttujan $a$ paikalle $\frac{1}{2}$ ja muuttujan $b$ paikalle $-1$.

Murtoluku merkitään sulkuihin.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{8} - \overset{4)}{\frac{3}{2}} + \overset{8)}{\frac{1}{1}} = \frac{1}{8} - \frac{12}{8} + \frac{8}{8} = -\frac{3}{8}$$

**VASTAUS** **a)** 10 **b)** $-\frac{3}{8}$

Suureet, joilla on sama yksikkö, voidaan laskea yhteen tai vähentää toisistaan. Esimerkiksi $4\text{ kg} + 2\text{ kg} = 6\text{ kg}$ tai $5\text{ m} - 2\text{ m} = 3\text{ m}$. Jos siis lausekkeilla tai polynomeilla termien muuttujaosat ovat samat, termit voidaan yhdistää. Tällaisia termejä sanotaan **samanmuotoisiksi**.

Yhteenlaskussa samanmuotoisten termien kertoimet lasketaan yhteen ja vähennyslaskussa kertoimet vähennetään toisistaan. Muuttuja pysyy kummassakin tilanteessa samana.

| Termit | | Summa | Erotus |
|---|---|---|---|
| $-2x$ | $7x$ | $-2x + 7x$<br>$= (-2 + 7)x$<br>$= 5x$ | $-2x - 7x$<br>$= (-2 - 7)x$<br>$= -9x$ |

Jos lausekkeet sisältävät useita termejä, laskutoimitus kannattaa selvyyden vuoksi kirjoittaa ensin sulkujen kanssa.

| Lausekkeet | | Summa | Erotus |
|---|---|---|---|
| $2x - 1$ | $-x + 3$ | $(2x - 1) + (-x + 3)$ | $(2x - 1) - (-x + 3)$ |

Yhteen- ja vähennyslaskussa edetään usein seuraavasti:

Kun vaihdetaan lausekkeen **kaikkien** termien etumerkit, saadaan **vastalauseke**. Vähentäminen tarkoittaa siis vastalausekkeen lisäämistä.

**1 Poistetaan sulut.**

- Jos sulkujen edessä on $+$, termien etumerkit säilyvät ennallaan.
- Jos sulkujen edessä on $-$, **kaikkien** sulkujen sisällä olevien termien etumerkit vaihdetaan vastakkaisiksi.

$$5x + (4x - 3) - (5 - 6x^2) = 5x + 4x - 3 - 5 + 6x^2$$

**2 Yhdistetään samanmuotoiset termit.**

$$5x + 4x - 3 - 5 + 6x^2 = 9x - 8 + 6x^2$$

**3 Järjestetään termit asteluvun mukaan.**

$$9x - 8 + 6x^2 = 6x^2 + 9x - 8$$

**Polynomien yhteen- ja vähennyslasku**

**Yhteenlaskussa** samanmuotoiset termit yhdistetään laskemalla yhteen termien kertoimet.

**Vähennyslaskussa** vastaavasti vähentämällä samanmuotoisten termien kertoimet toisistaan.

Muuttujaosa säilyy molemmissa laskutoimituksissa ennallaan.

**ESIMERKKI 2**

Sievennä.

**a)** $(2x + 1) + (-3x - 2)$

**b)** $4x - (3x + 3)$

**c)** $(2a^2 - 6) - (-4a^2 + 2a - 1) + (a - 1)$

**RATKAISU**

**a)** Poistetaan ensin sulut ja yhdistetään sitten samanmuotoiset termit.

$$(2x+1)+(-3x-2) = 2x+1-3x-2$$
$$= (2-3)x+1-2$$
$$= -x-1$$

+ sulkujen edessä, etumerkit säilyvät.

**b)** $4x-(3x+3) = 4x-3x-3$

$$= (4-3)x-3$$
$$= x-3$$

– sulkujen edessä, etumerkit vaihtuvat.

**c)** $(2a^2-6)-(-4a^2+2a-1)+(a-1)$

$$= 2a^2-6+4a^2-2a+1+a-1$$
$$= (2+4)a^2+(-2+1)a-6+1-1$$
$$= 6a^2-a-6$$

Termit järjestetään asteluvun mukaan.

**VASTAUS** **a)** $-x-1$ **b)** $x-3$ **c)** $6a^2-a-6$

Kertolasku on **liitännäinen** eli laskujärjestystä voidaan muuttaa tulon arvon muuttumatta.

Jos kerrottava lauseke sisältää useampia termejä, kertolaskussa käytetään **osittelulakia**.

| **Liitäntälaki**<br>$a(bc) = (ab)c$ | **Osittelulaki**<br>$a(b + c) = ab + ac$ |
|---|---|
| $3 \cdot (5x) = (3 \cdot 5)x = 15x$ | $3(x + 7) = 3 \cdot x + 3 \cdot 7 = 3x + 21$ |

**Lausekkeen kertominen luvulla**

Lauseke **kerrotaan** luvulla siten, että jokainen lausekkeen termi kerrotaan luvulla erikseen ja saadut tulot lasketaan yhteen.

$$a(b + c) = ab + ac$$

**ESIMERKKI 3**

Sievennä lausekkeet.

**a)** $-6 \cdot (-3x)$ **b)** $4(5x + 2)$

**c)** $(7x - 1) \cdot 5$ **d)** $-3(4a^2 - a + 2)$

**RATKAISU**

**a)** $-6 \cdot (-3x) = (-6) \cdot (-3)x = 18x$

**b)** $4(5x + 2) = 4 \cdot 5x + 4 \cdot 2 = 20x + 8$

**c)** Koska tulo on vaihdannainen, tulon tekijöiden paikkaa voidaan vaihtaa.

$(7x - 1) \cdot 5 = 5(7x - 1) = 5 \cdot 7x + 5 \cdot (-1) = 35x - 5$

**d)** $-3(4a^2 - a + 2) = -3 \cdot 4a^2 - 3 \cdot (-a) - 3 \cdot 2 = -12a^2 + 3a - 6$

**VASTAUS**

**a)** $18x$ **b)** $20x + 8$

**c)** $35x - 5$ **d)** $-12a^2 + 3a - 6$

**ESIMERKKI 4**

Sievennä.

**a)** $2(3x-4)+(5x-8)$ **b)** $6x-5(3x-1)$

**RATKAISU**

**a)** Lausekkeen sieventäminen aloitetaan suorittamalla ensin kertolasku. Tämän jälkeen lasketaan yhteen- ja vähennyslaskut.

$$2(3x-4)+(5x-8) = 2\cdot 3x+2\cdot(-4)+(5x-8)$$
$$= 6x-8+(5x-8) \quad \leftarrow \text{Poistetaan sulut.}$$
$$= 6x-8+5x-8 \quad \leftarrow \text{Yhdistetään samanmuotoiset termit.}$$
$$= 11x-16$$

**b)** Lasketaan ensin kertolasku ja yhdistetään sen jälkeen samanmuotoiset termit.

$$6x-5(3x-1) = 6x-5\cdot 3x-5\cdot(-1)$$
$$= 6x-15x+5$$
$$= -9x+5$$

**VASTAUS** **a)** $11x-16$ **b)** $-9x+5$

### Laskimen tai muun apuvälineen käyttö

**Lausekkeen sieventäminen**

Useimmat laskimet sieventävät yksinkertaiset polynomien yhteen- ja vähennyslaskut ilman erityistä toimintoa. Kertolaskujen suorittamiseen vaaditaan yleensä laskimen oma sievennystoiminto.

**Lausekkeen arvon laskeminen**

Lausekkeen arvon laskemista varten lauseke kannattaa tallentaa laskimen muistiin nimen ja muuttujakirjaimen avulla. Tällöin lausekkeen arvo saadaan suoraan laskimella eikä sijoitusta tarvitse tehdä erikseen kaikkiin muuttujaosiin.

**ESIMERKKI 5**

Liisa muuttaa uudelle opiskelupaikkakunnalle. Muuttofirma tarjoaa muuttopakettia, joka sisältää auton ja kuljettajan. Paketin hinta on 320 €. Liisa tarvitsee lisäksi muuttolaatikoita, joiden päivävuokra on 0,16 €/laatikko.

**a)** Muodosta polynomi $H(x)$, joka kuvaa kokonaishintaa, kun Liisa tarvitsee muuttolaatikoita kahdeksi päiväksi $x$ kappaletta.

**b)** Laske polynomin avulla kokonaishinta, kun Liisa arvioi tarvitsevansa 11 muuttolaatikkoa.

**RATKAISU**

**a)** Peruspaketin hinta on 320 €. Lisäksi tarvitaan muuttolaatikot kahdeksi päiväksi, joten niiden vuokra laatikkoa kohden on $2 \cdot 0{,}16\ € = 0{,}32\ €$.

Tutkitaan taulukoimalla kokonaishintaa erilaisilla laatikkomäärillä.

| Muuttolaatikoiden lukumäärä | Kokonaishinta (€) |
|---|---|
| 1 | $320 + 0{,}32 \cdot 1$ |
| 2 | $320 + 0{,}32 \cdot 2$ |
| 9 | $320 + 0{,}32 \cdot 9$ |
| $x$ | $320 + 0{,}32 \cdot x$ |

Jos muuttolaatikoita on $x$ kappaletta, kokonaishinta on

Tallenna lauseke laskimen muistiin.

$$H(x) = 320 + 0{,}32x\ (€).$$

**b)** Muuttolaatikoita tarvitaan 11 kappaletta, joten $x = 11$. Kokonaishinta saadaan sijoittamalla $x = 11$ polynomiin $H$.

Laske lausekkeen arvo suoraan laskimeen sijoitetun lausekkeen avulla.

$$H(11) = 320 + 0{,}32 \cdot 11 = 323{,}52\ (€)$$

**VASTAUS**

**a)** $H(x) = 320 + 0{,}32x\ (€)$ **b)** 323,52 €

# Tehtävät

**1.** Laske lausekkeen arvo, kun $x = 3$.

**a)** $2x - 1$ **b)** $-x^2 + x$

**2.** Olkoon $Q(x) = x^2 + 5x$. Laske.

**a)** $Q(3)$ **b)** $Q(-1)$ **c)** $Q\left(\frac{1}{2}\right)$

E1

**3.** **a)** Laske polynomin $Q(a) = -3a^2 + a$ arvo, kun $a = -1$.

**b)** Laske lausekkeen $x^2 - 3x - y$ arvo, kun $x = -\frac{1}{2}$ ja $y = -1$.

**4.** **a)** Laske lausekkeen $6x - 3x^3$ arvo, kun $x = -2$.

**b)** Laske polynomin $K(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x + 1$ arvo, kun $x = \frac{1}{3}$.

E2

**5.** Sievennä lauseke.

**a)** $(2x + 7) + (-5x - 4)$

**b)** $(-3y + 2) - (5y - 7)$

**c)** $2a - (-3a^2 + 6a - 1)$

**6.** Merkitse ja sievennä polynomien

**a)** $x^2 - 2x + 3$ ja $-4x + 6$ summa

**b)** $5x^2 - 1$ ja $-3x^2 + x - 4$ erotus.

**7.** Sievennä lauseke.

**a)** $(x^3 - 4x^2 + 5x - 2) + (4x^2 - 2x - 3)$

**b)** $a^2 - (-a^2 + 3) - (5a^2 + a)$

**c)** $2x - (3x + y - 5) + (y - 3)$

**8.** Olkoon $P(x) = x^2 - 5$ ja $R(x) = -3x^2 + x - 1$. Sievennä $P(x) - R(x)$.

**9.** Sievennä.

**a)** $5 \cdot 3a$ **b)** $6 \cdot 3$ kg **c)** $7m^2 \cdot (-2)$

E3

**10.** Sievennä.

**a)** $(-5) \cdot (-7a)$ **b)** $(4 - 6x) \cdot 3$ **c)** $3(-a^2 + 6a - 1)$

**11.** Sievennä.

**a)** $2(-5t + 3)$ **b)** $-(5t^4 - 3t + 1)$ **c)** $(-2 + 3k) \cdot \frac{1}{2}$

E4

**12.** Sievennä.

**a)** $-3(5 - 4x) + (6x - 9)$ **b)** $7x - 4(3 - 5x)$

**13.** Sievennä.

**a)** $8(3x-4)-6(-x-5)$ **b)** $-9(2-7x)-3(5x+2)+2(x-4)$

**14.** Olkoon $P(x)=4-x$ ja $Q(x)=x^2-2x$. Muodosta ja sievennä.

**a)** $P(x)-Q(x)$ **b)** $2\cdot P(x)+3\cdot Q(x)$

---

**15.** Olkoon $P(x)=13x^2-25x$ ja $Q(x)=-5x^2-6x+47$.

**a)** Muodosta ja sievennä $R(x)=15P(x)-16Q(x)$.

**b)** Laske $P(-14)$, $Q(12)$ ja $R(-9)$.

**16.** Täydennä taulukko.

| | Polynomin arvo, kun | | |
|---|---|---|---|
| **Polynomin lauseke sievennettynä** | $x=-23$ | $x=\frac{2}{5}$ | $x=35$ |
| $P(x)=-41x+15$ | | | |
| $Q(x)=19x^2-15x+20$ | | | |
| $R(x)=-4\cdot P(x)-8\cdot Q(x)$ <br> $=$ | | | |
| $H(x)=6(P(x)-7\cdot Q(x))$ <br> $=$ | | | |

**17.** Auto kulkee vakionopeudella $85\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

**a)** Muodosta lauseke, joka kuvaa kuljettua matkaa, kun autolla ajetaan $x$ tuntia.

**b)** Kuinka pitkälle autolla päästään puolessatoista tunnissa?

E5

**18.** Lili teettää digikuvista paperiset valokuvat. Kuvien kappalehinta on 0,19 €. Lisäksi peritään posti- ja käsittelykuluja 5,90 €.

**a)** Muodosta polynomi $K$, joka kuvaa kokonaishintaa, kun teetettäviä kuvia on $x$ kappaletta.

**b)** Laske polynomin avulla kokonaishinta, kun Lili teettää 120 valokuvaa.

**19.** Otso vuokraa lomamatkallaan auton, jonka vuorokausivuokra on 69,80 €. Otso ottaa lisäturvana kolariturvan ja lisäpalveluna navigointilaitteen. Kolariturva lisää kustannuksia 3,57 €/vrk. Navigointilaitteesta veloitaan 25,50 €:n suuruinen kertamaksu.

**a)** Muodosta polynomi $R$, joka kuvaa vuokrauksen kokonaiskustannuksia, kun auto vuokrataan $x$ vuorokaudeksi.

**b)** Laske polynomin avulla kokonaiskustannukset, kun Otso vuokraa auton viideksi päiväksi.

**20.** Riina lumilautailee lomansa aikana. Hän vuokraa läheisestä hiihtokeskuksesta lumilautasetin, joka sisältää laudan, kengät ja kypärän. Setin vuokraaminen päiväksi maksaa 40 €. Lisäpäivät maksavat 28 €/päivä.

**a)** Muodosta ja sievennä polynomi, joka kuvaa välineiden vuokrauksen kokonaiskustannusten riippuvuutta päivien lukumäärästä $x$.

**b)** Laske polynomin avulla viiden päivän välinevuokran kokonaiskustannukset.

**21.** Suorakulmion kannan pituutta kuvaa lauseke $6x - 5$. Suorakulmion korkeus on 4 yksikköä kantaa lyhyempi.

**a)** Muodosta ja sievennä polynomi $P$, joka kuvaa suorakulmion piiriä.

**b)** Laske piirin pituus, kun $x = 3$.

**22.** Santeri myy torilla puolukoita. Rasia puolukoita maksaa 5,50 €. Päivän aikana Santeri myy keskimäärin 40 rasiaa.

**a)** Muodosta ja sievennä lauseke, joka kuvaa päivän myyntituloja, kun Santeri myy puolukoita $x$ rasiaa keskimääräistä enemmän.

**b)** Laske muodostamasi lausekkeen avulla myyntitulot, kun Santeri myy puolukoita 11 rasiaa keskimääräistä enemmän.

## Sekalaisia

**23.** Olkoon $R(x) = -3x^2 + 3x - 1$. Laske.

**a)** $R(-4)$ **b)** $R\left(\frac{1}{3}\right)$

**24.** Sievennä lauseke.

**a)** $y - (3y + 8) + (-2y + 4)$ **b)** $2a + (a - 3) - (3a + 9)$

**c)** $5(2x + 1) + (-3x + 2)$ **d)** $-2(x - 1) - (6x - 3)$

**25.** Sievennä lauseke $3(x - 1) + (x^2 + 3x - 5) - 2(x^2 - 4)$ ja laske sen arvo, kun $x = -1$.

---

**26.** Kuntoklubin BG vuosijäsenyys maksaa 85 €. Tämän lisäksi kävijät maksavat 5,50 euron käyntimaksun. Kilpaileva kuntoklubi CityTeam perii jäsenmaksua 25 € vuosittain, ja jokainen käyntikerta maksaa 7,50 €.

**a)** Muodosta polynomit, jotka kuvaavat kuntosalilla käynnin kustannuksia kummallakin salilla yhden vuoden aikana, kun käyntikertoja on $x$ kappaletta.

**b)** Kumpaa kuntosalia on edullisempaa käyttää, jos käyntikertoja on 32 kappaletta vuoden aikana?

**27.** Erään mallin mukaan naisten kuntoharjoittelun maksimisyke lasketaan kaavalla $226 - T$ ja miesten maksimisyke kaavalla $220 - T$, kun $T$ on henkilön ikä vuosina.

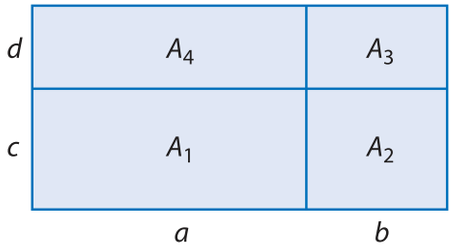
**a)** Kuinka monta prosenttia 18-vuotiaan naisen maksimisyke on samanikäisen miehen maksimisykettä korkeampi?

**b)** Erään suosituksen mukaan kuntoharjoittelussa sykkeen tulisi olla 60–70 % maksimisykkeestä. Määritä nämä rajat 30-vuotiaalle naiselle. [K2015, 3]

# 1.2 Polynomien tulo

**Pohdinta**

**a)** Jaetaan suorakulmio neljäksi pienemmäksi suorakulmioksi.



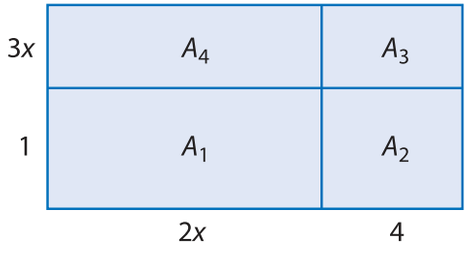

- Muodosta lauseke suuren suorakulmion kannan pituudelle.
- Muodosta lauseke suuren suorakulmion korkeudelle.

- Muodosta lausekkeet pienien suorakulmioiden pinta-aloille $A_1$, $A_2$, $A_3$ ja $A_4$.

Muodosta lauseke suuren suorakulmion pinta-alalle.

$=$

**b)** Muodosta vastaavalla tavalla lauseke suuren suorakulmion pinta-alalle ja ja sievennä se a-kohdan säännön avulla.



Kertolasku on vaihdannainen eli useamman luvun välinen kertolasku voidaan laskea missä järjestyksessä tahansa.

$$25 \cdot 13 \cdot 4 = 4 \cdot 25 \cdot 13 = 100 \cdot 13 = 1300$$

Vaihdetaan tulon tekijöiden paikkaa niin, että laskutoimitus on helpompi laskea.

Tätä samaa vaihdantalakia voidaan käyttää myös monomien kertolaskussa.

$$2x \cdot 4x^3 = 2 \cdot 4 \cdot x \cdot x^3 = 8 \cdot x^{1+3} = 8x^4$$

Samankantaiset potenssit yhdistetään potenssien laskusääntöjen mukaan: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

Kahden monomin tulossa kertoimet kerrotaan keskenään ja samankantaiset potenssit yhdistetään potenssien laskusääntöjen avulla.

Monomin ja binomin kertolaskussa sovelletaan kertolaskun osittelulakia $a(b + c) = ab + ac$.

$$2x(5x + 3) = 2x \cdot 5x + 2x \cdot 3 = 10x^2 + 6x$$

**Monomilla kertominen**

Kahden monomin tulossa kertoimet kerrotaan keskenään ja kirjainosat yhdistetään samankantaisten potenssien laskusääntöjen avulla.

Monomin ja polynomin tulossa monomilla kerrotaan jokainen polynomin termi.

$$a(b + c) = ab + ac$$

**ESIMERKKI 1**

Sievennä lausekkeet.

**a)** $5x^2 \cdot 8x^4$ **b)** $-2x^2(3x^3 - 6x + 4)$

**RATKAISU**

**a)** Kerrotaan kertoimet keskenään ja yhdistetään kirjainosat samankantaisten potenssien laskusääntöjen mukaan.

$$5x^2 \cdot 8x^4 = 5 \cdot 8 \cdot x^{2+4} = 40x^6$$

samankantaisten potenssien tulo: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

**b)** Kerrotaan monomilla $-2x^2$ jokainen sulkujen sisällä oleva termi.

$$\begin{aligned} -2x^2(3x^3 - 6x + 4) &= -2x^2 \cdot 3x^3 - 2x^2 \cdot (-6x) - 2x^2 \cdot 4 \\ &= -2 \cdot 3 \cdot x^{2+3} - 2 \cdot (-6) \cdot x^{2+1} - 2 \cdot 4x^2 \\ &= -6x^5 + 12x^3 - 8x^2 \end{aligned}$$

**VASTAUS** **a)** $40x^6$ **b)** $-6x^5 + 12x^3 - 8x^2$

Kahden polynomin tulossa sovelletaan pohdintatehtävässä esiteltyä laskusääntöä.

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Kahden polynomin tulossa kaikki termit kerrotaan vuoron perään toisillaan. Kertolaskun jälkeen yhdistetään samanmuotoiset termit.

Lisämateriaali: Murtolausekkeita s. 140

**Kahden polynomin tulo**

Kahden polynomin tulossa kaikki termit kerrotaan vuoron perään toisillaan.

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

**ESIMERKKI 2**

Laske.

**a)** $(3x-1)(2x+6)$ **b)** $(3-2x)(4x^2-2x+5)$

**c)** $(2x-3)^2$ **d)** $(x+2)(x-2)$

**RATKAISU**

**a)** Kerrotaan ensin termeillä $3x$ ja $-1$ molemmat jälkimmäisen polynomin termit.

$$(3x-1)(2x+6) = 3x\cdot 2x + 3x\cdot 6 - 1\cdot 2x - 1\cdot 6$$
$$= 6x^2 + \underbrace{18x - 2x} - 6$$
$$= 6x^2 + 16x - 6$$

Yhdistä samanmuotoiset termit.

**b)** Kerrotaan termeillä $3$ ja $-2x$ kaikki jälkimmäisen polynomin termit.

$$(3-2x)(4x^2-2x+5)$$
$$= 3\cdot 4x^2 + 3\cdot(-2x) + 3\cdot 5 - 2x\cdot 4x^2 - 2x\cdot(-2x) - 2x\cdot 5$$
$$= 12x^2 - 6x + 15 - 8x^3 + 4x^2 - 10x$$
$$= -8x^3 + 16x^2 - 16x + 15$$

Kirjoita termit alenevien potenssien mukaan.

Lisämateriaali: Muistikaavat s. 146

**c)** Kirjoitetaan potenssi kahden polynomin tulona.

$$(2x-3)^2 = (2x-3)(2x-3)$$
$$= 2x\cdot 2x + 2x\cdot(-3) - 3\cdot 2x - 3\cdot(-3)$$
$$= 4x^2 - 6x - 6x + 9$$
$$= 4x^2 - 12x + 9$$

**d)** Kerrotaan termeillä $x$ ja $2$ kaikki jälkimmäisen polynomin termit.

$$(x+2)(x-2) = x\cdot x + x\cdot(-2) + 2\cdot x + 2\cdot(-2)$$
$$= x^2 - 2x + 2x - 4$$
$$= x^2 - 4$$

**VASTAUS**

**a)** $6x^2 + 16x - 6$ **b)** $-8x^3 + 16x^2 - 16x + 15$

**c)** $4x^2 - 12x + 9$ **d)** $x^2 - 4$

Mikäli lauseke sisältää useita eri laskutoimituksia, sievennettäessä on muistettava noudattaa oikeaa laskujärjestystä:

1. sulkuihin merkityt laskutoimitukset
2. kerto- ja jakolaskut sekä potenssiin korotukset
3. yhteen- ja vähennyslaskut.

Monissa tilanteissa varsinkin kertolaskujen tulos kannattaa kirjoittaa ensin sulkumerkkien sisään. Tällöin välttyy turhilta huolimattomuusvirheiltä.

**ESIMERKKI 3**

Laske.

**a)** $3x-(2x+6)(x-1)$ **b)** $-2x(x-3)(x^3-x)$

**RATKAISU**

**a)** Lasketaan ensin kertolasku ja sievennetään sen tulos.

$$\begin{aligned}
&3x-(2x+6)(x-1)\\
&=3x-(2x\cdot x+2x\cdot(-1)+6\cdot x+6\cdot(-1))\\
&=3x-(2x^2-2x+6x-6)\\
&=3x-(2x^2+4x-6)\\
&=3x-2x^2-4x+6\\
&=-2x^2-x+6
\end{aligned}$$

Kirjoita kertolaskun tulos sulkuihin.

– sulkujen edessä, etumerkit vaihtuvat.

**b)** Lasketaan ensin polynomien $-2x$ ja $x-3$ tulo. Kerrotaan sitten tällä tulolla polynomi $x^3-x$.

$$\begin{aligned}
&-2x(x-3)(x^3-x)\\
&=(-2x\cdot x-2x\cdot(-3))(x^3-x)\\
&=(-2x^2+6x)(x^3-x)\\
&=-2x^2\cdot x^3-2x^2\cdot(-x)+6x\cdot x^3+6x\cdot(-x)\\
&=-2x^5+2x^3+6x^4-6x^2\\
&=-2x^5+6x^4+2x^3-6x^2
\end{aligned}$$

Sievennä kertolaskun tulos.

**VASTAUS**

**a)** $-2x^2-x+6$

**b)** $-2x^5+6x^4+2x^3-6x^2$

**ESIMERKKI 4**

Elintarviketeollisuuden yritys osti marjanpoimijalta mustikoita heinäkuun viimeisenä päivänä 80 kg. Yritys maksoi mustikoista 3,50 €/kg. Marjanpoimija kasvatti poimimiensa mustikoiden määrää elokuun aikana aina 1,2 kg vuorokaudessa. Mustikoiden ostohinta laski joka vuorokausi 0,05 €/kg.

**a)** Muodosta ja sievennä polynomi $R(x)$, joka kuvaa marjanpoimijan saamaa myyntituloa elokuun $x$. päivänä.

**b)** Laske polynomin avulla, kuinka suuret olisivat marjanpoimijan saamat myyntitulot 23.8.

**RATKAISU**

**a)** Muodostetaan polynomin lauseke taulukon avulla.

| Päivä-määrä | Mustikoiden määrä (kg) | Myyntihinta (€/kg) | Myyntitulot (€) (määrä · hinta) |
|---|---|---|---|
| 1.8. | $80 + 1{,}2$ | $3{,}50 - 0{,}05$ | $(80 + 1{,}2)(3{,}50 - 0{,}05)$ |
| 2.8. | $80 + 2 \cdot 1{,}2$ | $3{,}50 - 2 \cdot 0{,}05$ | $(80 + 2 \cdot 1{,}2)(3{,}50 - 2 \cdot 0{,}05)$ |
| 3.8. | $80 + 3 \cdot 1{,}2$ | $3{,}50 - 3 \cdot 0{,}05$ | $(80 + 3 \cdot 1{,}2)(3{,}50 - 3 \cdot 0{,}05)$ |
| $x$.8. | $80 + x \cdot 1{,}2$ | $3{,}50 - x \cdot 0{,}05$ | $(80 + x \cdot 1{,}2)(3{,}50 - x \cdot 0{,}05)$ |

Määrittele $R(x)$ laskimeen muuttuja-lausekkeeksi. Tällöin useimmissa laskimissa polynomin $R$ arvo kohdassa $x = 23$ saadaan näppäilemällä laskimeen $R(23)$.

Poimijan saamaa myyntituloa kuvaa polynomi

$$R(x) = (80 + x \cdot 1{,}2)(3{,}50 - x \cdot 0{,}05)$$

Sievennä lauseke laskimella.

$$= -0{,}06x^2 + 0{,}2x + 280$$

**b)** Myyntitulot 23.8. saadaan sijoittamalla lausekkeeseen $x = 23$.

$$R(23) = -0{,}06 \cdot 23^2 + 0{,}2 \cdot 23 + 280 = 252{,}86 \quad (€)$$

**VASTAUS**

**a)** Myyntituloja kuvaa lauseke $R(x) = -0{,}06x^2 + 0{,}2x + 280$.

**b)** Myyntitulot 23.8. olisivat 252,86 €.

# Tehtävät

E1

**28.** Sievennä lausekkeet.

**a)** $3x^3 \cdot 2x^2$ **b)** $-3x^3(4x^2 + 3x - 5)$

**29.** Sievennä.

**a)** $2x \cdot 3x^2 \cdot 7x^5$ **b)** $-4x^2 \cdot 2x \cdot 5x^3$

**c)** $-6x^3 \cdot x \cdot (-3x^6)$ **d)** $\frac{1}{3}x^2 \cdot 6x \cdot 2x^2$

**30.** Sievennä.

**a)** $5x(x^2 - 6x + 2)$ **b)** $-x^2(6x^2 - 3x - 2)$

**c)** $(2x^3 - x + 1) \cdot (-3x^4)$ **d)** $\frac{1}{2}x^3(4x^2 - 6x + 2)$

**31.** Sievennä.

**a)** $\frac{1}{3}x^3 \cdot \frac{2}{3}x \cdot \frac{3}{4}x^2$ **b)** $\frac{3}{4}x^3\left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{6}\right)$

E2

**32.** Laske.

**a)** $(2x + 3)(4x + 5)$ **b)** $(2 - x)(5x^2 + 3x - 2)$

**c)** $(3x - 4)^2$ **d)** $(2x - 6)(2x + 6)$

**33.** Laske.

**a)** $(3x + 2)(4 + 6x)$ **b)** $(x^2 + 3)(2x + 1)$

**c)** $(2x - 7)(1 + x)$ **d)** $(x^2 - 2)(x^2 - 5)$

**34.** Laske.

**a)** $(4x - 3)(5 - 2x)$ **b)** $(2 - 3x^2)(4 + x^2)$

**c)** $(7x^2 - 2)(3 - x)$ **d)** $\left(\frac{1}{2}x - 1\right)\left(\frac{2}{3}x + 2\right)$

**35.** Laske.

**a)** $(3x - 5)(6x^2 - 2x - 1)$ **b)** $\left(\frac{1}{4}x + 2\right)\left(2x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}\right)$

**36.** Laske.

**a)** $(4x + 2)^2$ **b)** $(2x + 3)(2x - 3)$ **c)** $(8 - x^2)^2$

E3

**37.** Laske.

**a)** $6x^2 - (x + 3)(2x - 4)$ **b)** $3x(x + 2)(x^2 - 4x)$

**38.** Laske.

**a)** $7x + (x + 5)(3x - 1)$ **b)** $-2x^2 - (5x - 4)(x - 8)$

**39.** Laske.

**a)** $3x \cdot 2x^2 - 5x(3x^2 - 3)$

**b)** $(2x + 3)(x - 6) - (3 - x)(9 - x)$

**40.** Laske.

**a)** $2x(4x + 7)(x - 1)$

**b)** $(x + 5)(6 - 3x) \cdot 3x$

**c)** $-4x^2(2 - x)(3x - 5)$

**d)** $-\frac{1}{4}x^2(x + 3)(4x - 2)$

**41.** Sievennä.

**a)** $x^m(x^{2m-3} + x^{3m}) - x^{m-1}(x^{-m+2})$

**b)** $2x^{n+2}(4x^{1-n} - 8x^{3n-2}) + 16x^{4n}$

---

E4

**42.** Elokuvateatterissa kävijöiden määrä riippuu lipun hinnasta. Kun lippu maksaa 10,0 €, elokuvateatterissa käy 6500 henkilöä viikossa. Jokainen euron korotus lipun hinnassa vähentää teatterin kävijämäärää 150 henkilöllä viikossa.

**a)** Muodosta ja sievennä polynomi $M(x)$, joka kuvaa teatterin viikoittaista myyntituloa, kun lipun hinta muuttuu $x$ euroa.

**b)** Laske polynomin $M(x)$ avulla viikon myyntitulot, kun lipun hinta on 13,20 €.

**43.** Suorakulmion muotoisen maa-alueen ympärysmitta oli 500 m. Merkitään toisen sivun pituutta kirjaimella $x$.

**a)** Millainen lauseke kuvaa tällöin toista sivua?

**b)** Muodosta suorakulmion pinta-alaa kuvaava polynomi $A(x)$ ja sievennä polynomin lauseke.

**c)** Laske suorakulmion pinta-ala, kun toisen sivun pituus on 67,5 m.

**44.** Urheiluseura myy jääkiekko-ottelun erätauoilla grillimakkaroita 2 euron kappalehintaan. Tällä hinnalla makkaroita menee kaupaksi 1800 kappaletta yhden ottelun aikana. Urheiluseuran tekemän tutkimuksen mukaan jokainen 0,20 euron hinnan korotus vähentää makkaroiden myyntiä 110 kappaleella ottelua kohti.

**a)** Urheiluseura muuttaa makkaroiden kappalehintaa 0,20 euroa kerrallaan. Muodosta ja sievennä polynomi $H(x)$, joka kuvaa makkaroiden myynnistä saatavaa myyntituloa, kun hintaa on muutettu $x$ kertaa.

**b)** Laske polynomin $H(x)$ avulla makkaroiden myynnistä saatavat myyntitulot, kun myyntihinta on 3,20 €.

## Sekalaisia

**45.** Sievennä lausekkeet.

**a)** $-4x^2 \cdot x \cdot 3x^5$

**b)** $9x^2(2x^3 - 3x^2 + 6x)$

**46.** Sievennä.

**a)** $(6 + 5x)(3x + 8)$

**b)** $(2x - 5)(3x + 1)$

**c)** $(x^2 - 7)(3 - 2x^2)$

**d)** $\left(\frac{1}{2}x + 3\right)\left(\frac{4}{5}x - 4\right)$

**47.** Laske.

**a)** $-12x^2 - (5x + 2)(4 - 9x)$

**b)** $-8x^3(x - 2)(5x^2 - x)$

**48.** Laske.

**a)** $(7x - 1)^2$

**b)** $(4 - 5x)(4 + 5x)$

---

**49.** Sijoittaja ostaa 4700 kappaletta tietotekniikkayrityksen osakkeita 7,50 euron kappalehintaan. Sijoittaja myy ja ostaa osakkeita sen mukaan, miten osakkeiden hinta muuttuu. Jokaista euron hinnannousua kohti sijoittaja myy 400 kappaletta osakkeistaan.

**a)** Muodosta ja sievennä polynomi $P(x)$, joka kuvaa sijoittajan omistamien osakkeiden yhteisarvoa, kun osakkeiden kappalehinta muuttuu $x$ €.

**b)** Laske sijoittajan omistamien osakkeiden yhteisarvo, kun osakkeen hinta on 11,50 €.

**c)** Laske sijoittajan omistamien osakkeiden yhteisarvo, kun osakkeen hinta on 5,80 €.

# 2 Yhtälöitä ja funktioita

## Tavoitteena on

- kerrata ja vahvistaa ensimmäisen asteen yhtälön ratkaisutaitoja
- oppia ratkaisemaan toisen asteen yhtälöitä
- oppia muodostamaan lausekkeita erilaisissa sanallisissa tehtävissä
- oppia käyttämään laskinta polynomien yhtälöiden ratkaisussa
- oppia käyttämään laskinta polynomifunktion kuvaajan tulkitsemisessa.

- Miten ratkaistaan ensimmäisen asteen yhtälö?
  – nimittäjien poistaminen
- Miten ratkaistaan toisen asteen yhtälö?
  – vaillinaiset toisen asteen yhtälöt
  – ratkaisukaava
- Millainen on ensimmäisen asteen polynomifunktion kuvaaja?
  – kulmakerroin ja kulkusuunta
  – akselien leikkauskohdat
- Millainen on toisen asteen polynomifunktion kuvaaja?
  – aukeamissuunta ja nollakohdat
  – huippu ja symmetria-akseli
- Miten tulkitaan funktion kuvaajaa?
  – funktion arvon määrittäminen
  – yhtälön ja epäyhtälön ratkaiseminen

- Miten sanallisissa tehtävissä muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö?
- Miten sanallisissa tehtävissä muodostetaan funktio?
- Miten funktion lauseketta voidaan käsitellä laskimella?
  – lausekkeen sieventäminen
  – funktion arvon laskeminen
  – muuttujan arvon ratkaiseminen yhtälön avulla
- Miten funktion kuvaaja piirretään laskimella?
- Miten funktion kuvaajaa voidaan tulkita laskimen avulla?
  – nollakohtien määrittäminen
  – funktion arvon määrittäminen
  – yhtälön ratkaiseminen
  – huipun koordinaattien määrittäminen

# 2.1 Ensimmäisen asteen yhtälö

**Pohdinta**

Lausekkeiden muodostaminen ja yhtälöiden ratkaiseminen ovat välttämättömiä matematiikan perustaitoja.

Fahrenheit-asteikko on hollantilaisen fyysikon Gabriel Fahrenheitin vuonna 1724 esittelemä lämpötila-asteikko. Sitä käytetään yleisesti esimerkiksi Yhdysvalloissa. Fahrenheitasteet (°F) muunnetaan celsiusasteiksi (°C) seuraavasti: fahrenheitasteista vähennetään luku 32 ja saatu erotus jaetaan luvulla 1,8.

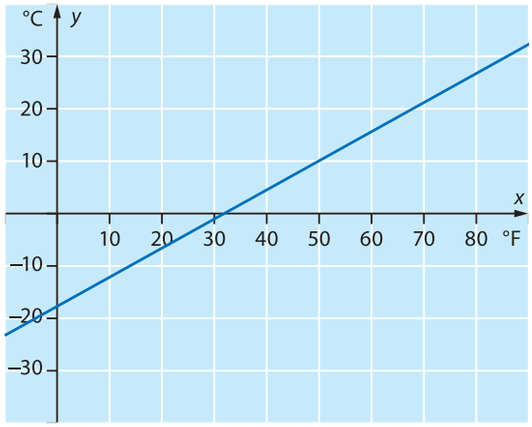
**a)** Merkitään fahrenheitasteita kirjaimella $x$. Muodosta lauseke, joka muuntaa $x$ fahrenheitastetta celsiusasteiksi.

**b)** Sijoita edellä saatuun lausekkeeseen kirjaimen $x$ paikalle luku 100. Mitä tämän laskutoimituksen avulla tehdään?

**c)** Merkitse a-kohdassa saatu lauseke yhtä suureksi kuin luku 150, jolloin muodostuu yhtälö. Mitä tämän yhtälön avulla voidaan ratkaista?

**d)** Etsi laskimestasi toiminto, jolla voidaan ratkaista yhtälö. Ratkaise toiminnon avulla c-kohdan yhtälö.

**e)** Kuvaajassa havainnollistetaan celsius- ja fahrenheitasteiden välistä riippuvuutta koordinaatistossa. Päättele kuvaajan avulla, kuinka paljon 0 °F on celsiusasteina. Entä 0 °C fahrenheitasteina?

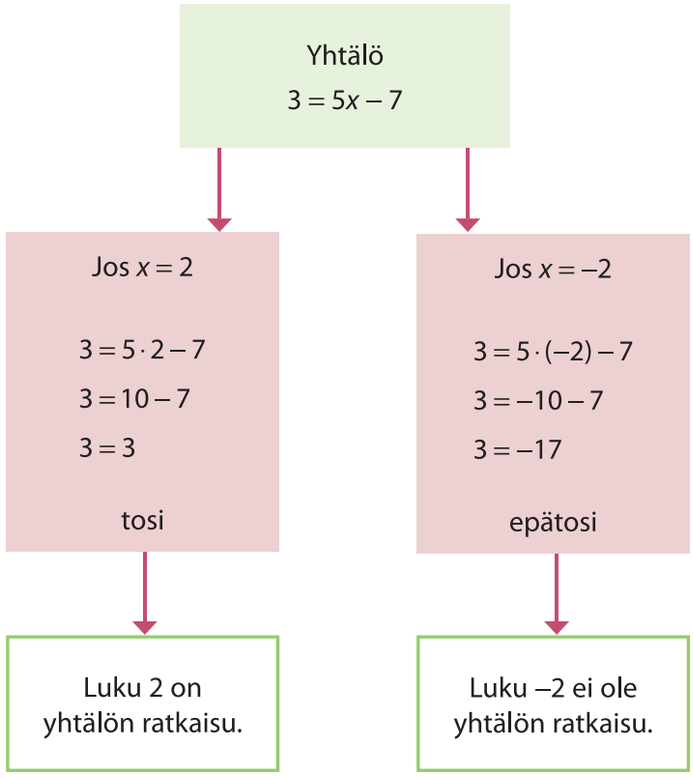


## Yhtälön ratkaiseminen

Matematiikassa käsitellään lausekkeita ja yhtälöitä. Lausekkeella tarkoitetaan numeroiden ja kirjaimien avulla merkittyä laskutoimitusta. Kun kaksi lauseketta merkitään yhtä suuriksi, saadaan **yhtälö**.

| Lauseke | Yhtälö |
|---|---|
| $3$<br>$5x - 7$ | $3 = 5x - 7$ |

Yhtälössä esiintyy useimmiten tuntematon, jota merkitään sopivalla kirjaimella. Sijoittamalla tuntemattoman paikalle lukuja saadaan yhtälöitä, jotka voivat olla joko tosia tai epätosia. Sellaista tuntemattoman arvoa, jolla yhtälö on tosi, sanotaan **yhtälön ratkaisuksi** eli **yhtälön juureksi**. Yhtälön ratkaisu siis toteuttaa yhtälön.




Yhtälö $\mathbf{3 = 5x - 7}$ voidaan sieventää muotoon $\mathbf{5x - 10 = 0}$. Yhtälön vasemmalla puolella on ensimmäisen asteen polynomi ja oikealla puolella nolla. Kaikkia yhtälöitä, jotka voidaan sieventää tähän muotoon, sanotaan **ensimmäisen asteen yhtälöiksi**. Niihin tutustuttiin jo ensimmäisessä kurssissa.

**Ensimmäisen asteen yhtälö**

Yhtälöä, joka voidaan sieventää muotoon

$$ax + b = 0 \qquad (a \in \mathbf{R},\ b \in \mathbf{R},\ a \neq 0)$$

sanotaan ensimmäisen asteen yhtälöksi.

**Yhtälön ratkaisemisella** tarkoitetaan kaikkien niiden tuntemattomien arvojen etsimistä, jotka toteuttavat yhtälön. Yhtälöä ratkaistaessa yhtälö pyritään muokkaamaan sellaiseen muotoon, josta ratkaisu on suoraan luettavissa.

Yhtälön ratkaiseminen aloitetaan yleensä poistamalla kaikki sulut ja yhdistämällä samanmuotoiset termit. Sulkuja poistettaessa on muistettava merkkisäännöt.

- Kun lauseke kerrotaan negatiivisella luvulla, lausekkeen kaikkien termien etumerkki vaihtuu.
- Jos sulkulausekkeen edessä on miinusmerkki, lausekkeen kaikkien termien etumerkki vaihtuu sulkuja poistettaessa.

Tämän jälkeen tuntemattomia sisältävät termit pyritään saamaan yhtälön vasemmalla puolelle ja vakiotermit oikealle puolelle. Yhtälöä ratkaistaessa voidaan käyttää seuraavia keinoja:

- Yhtälön molemmille puolille voidaan lisätä sama luku tai lauseke.

Useimmiten termi vain "siirretään" puolelta toiselle, jolloin sen etumerkki muuttuu.

$$\begin{aligned} 4x - 3 &= 2x \quad \big| -2x \\ 4x - 2x - 3 &= 2x - 2x \\ 4x - 2x - 3 &= 0 \\ 2x - 3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x - 6 &= 14 \quad \big| +6 \\ 5x - 6 + 6 &= 14 + 6 \\ 5x &= 14 + 6 \\ 5x &= 20 \end{aligned}$$

- Yhtälön molemmat puolet voidaan kertoa tai jakaa samalla luvulla tai lausekkeella. Tämä luku ei saa kuitenkaan olla nolla.

$$\begin{aligned} 2x &= 3 \quad \big| :2 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{3}{2} \\ x &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} &= 4 \quad \big| \cdot 3 \\ 3 \cdot \frac{x}{3} &= 4 \cdot 3 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

**ESIMERKKI 1**

Ratkaise yhtälö.

**a)** $2x - 3(1 - 2x) = 5$ **b)** $6 - (2 - 5x) = 8x - 2$

**RATKAISU**

**a)** Sievennetään ensin yhtälön vasenta puolta poistamalla sulut ja yhdistämällä samanmuotoiset termit.

$$2x - 3(1 - 2x) = 5$$
$$2x - 3 + 6x = 5$$

Kun lauseke kerrotaan negatiivisella luvulla, lausekkeen kaikkien termien etumerkki muuttuu.
$-3(1 - 2x) = -3 + 6x$

Seuraavaksi yhtälö muokataan muotoon, jossa tuntemattoman sisältävät termit ovat vasemmalla puolella ja vakiotermit oikealla puolella. Tämä voidaan tehdä kahdella tavalla.

**Tapa 1**

$$8x - 3 = 5 \quad | \; +3$$
$$8x - 3 + 3 = 5 + 3$$
$$8x = 8 \quad | \; :8$$
$$x = 1$$

Yhtälön vasemmalla puolella oleva termi $-3$ saadaan pois lisäämällä molemmille puolille luku $+3$.

Jaetaan muuttujan $x$ kertoimella.

Kaikkia ratkaisun välivaiheita ei tarvitse kirjoittaa näkyviin. Ratkaisusta on kuitenkin käytävä ilmi, mitä menetelmää ratkaisussa on käytetty.

**Tapa 2**

$$8x - 3 = 5$$
$$8x = 5 + 3$$
$$8x = 8 \quad | \; :8$$
$$x = 1$$

Siirretään termi $-3$ yhtälön oikealle puolelle, jolloin termin etumerkki vaihtuu.

**b)** Sievennetään yhtälöä poistamalla sulkeet ja yhdistämällä samanmuotoiset termit.

$$6 - (2 - 5x) = 8x - 2$$
$$6 - 2 + 5x = 8x - 2$$
$$4 + 5x = 8x - 2$$
$$5x - 8x = -2 - 4$$
$$-3x = -6 \quad | \; :(-3)$$
$$x = 2$$

Sulkeiden edessä oleva miinusmerkki vaihtaa kaikkien termit etumerkit.

**VASTAUS** **a)** $x = 1$ **b)** $x = 2$

**ESIMERKKI 2**

Määritä vakio $a$ siten, että $x = 4$ on yhtälön $ax^2 - 18x + 8a = 0$ ratkaisu.

**RATKAISU**

Jos $x = 4$ on yhtälön ratkaisu, se toteuttaa yhtälön.

Sijoitetaan $x = 4$ yhtälöön. Näin muodostuu ensimmäisen asteen yhtälö, jossa $a$ on tuntematon.

$$\begin{aligned} a \cdot 4^2 - 18 \cdot 4 + 8a &= 0 \\ 16a - 72 + 8a &= 0 \\ 24a &= 72 \qquad \mid : 24 \\ a &= 3 \end{aligned}$$

**VASTAUS** $a = 3$

## Nimittäjien poistaminen

Ensimmäisen asteen yhtälö voi sisältää murtolukuja ja murtolausekkeita. Tällaisia yhtälöitä ovat esimerkiksi:

$\frac{2}{3}x = \frac{2x}{3}$ → $\frac{2}{3}x + 2x = \frac{3}{4}$

$\frac{x-2}{5} + 2 = \frac{x}{2}$ ← $\frac{x-2}{5} = \frac{1}{5}(x-2)$

Tällaista yhtälöä kannattaa muokata niin, että kaikille termeille tulee kokonaislukukertoimet. Muokkaamisen vaiheet ovat seuraavat:

1. Kirjoitetaan kaikki termit nimittäjien kanssa. Jos termillä ei ole nimittäjää, nimittäjäksi voidaan merkitä luku 1.

$$5 = \frac{5}{1} \qquad 2x = \frac{2x}{1}$$

2. Lavennetaan samannimisiksi.

3. Kerrotaan yhtälön molemmat puolet yhteisellä nimittäjällä. Merkkivirheiden välttämiseksi osoittaja kannattaa merkitä sulkuihin, jos lausekkeen edessä on miinusmerkki.

$$-\frac{3-4x}{2} = -\frac{(3-4x)}{2}$$

**ESIMERKKI 3**

Ratkaise yhtälö.

**a)** $x-\frac{1}{4}=2+\frac{2x}{3}$ **b)** $\frac{3x-1}{4}-\frac{x-3}{2}=\frac{x}{2}$

**RATKAISU**

**a)** Kirjoitetaan kaikki termit ensin nimittäjän kanssa ja lavennetaan sitten samannimisiksi.

$$x-\frac{1}{4}=2+\frac{2x}{3}$$

$$\overset{12)}{\frac{x}{1}}-\overset{3)}{\frac{1}{4}}=\overset{12)}{\frac{2}{1}}+\overset{4)}{\frac{2x}{3}}$$

$$\frac{12x}{12}-\frac{3}{12}=\frac{24}{12}+\frac{8x}{12} \qquad \big|\cdot 12$$

$$12x-3=24+8x$$

$$12x-8x=24+3$$

$$4x=27 \qquad \big|:4$$

$$x=\frac{27}{4}$$

Jokaisella termillä on nimittäjänä luku 12. Nimittäjät saadaan poistettua, kun yhtälö kerrotaan yhteisellä nimittäjällä 12.

$$\frac{\cancel{12}\cdot 12x}{\cancel{12}}-\frac{\cancel{12}\cdot 3}{\cancel{12}}=\frac{\cancel{12}\cdot 24}{\cancel{12}}+\frac{\cancel{12}\cdot 8x}{\cancel{12}}$$

**b)** $\frac{3x-1}{4}-\overset{2)}{\frac{x-3}{2}}=\overset{2)}{\frac{x}{2}}$

$$\frac{3x-1}{4}-\frac{2(x-3)}{4}=\frac{2x}{4}$$

$$\frac{3x-1}{4}-\frac{2x-6}{4}=\frac{2x}{4} \qquad \big|\cdot 4$$

$$3x-1-(2x-6)=2x$$

$$3x-1-2x+6=2x$$

$$x+5=2x$$

$$x-2x=-5$$

$$-x=-5 \qquad \big|:(-1)$$

$$x=5$$

Koska lausekkeen $\frac{2x-6}{4}$ edessä on miinusmerkki, osoittaja kannattaa merkitä sulkuihin nimittäjien poiskertomisen yhteydessä.

**VASTAUS** **a)** $x=\frac{27}{4}$ **b)** $x=5$

**ESIMERKKI 4**

Taloyhtiöt perivät osakkailtaan kuukausittain yhtiövastikkeen, jolla katetaan taloyhtiön kulut.

**a)** Taloyhtiössä A kaksion vastikkeesta puolet aiheutuu lämmityksestä ja vedestä, kolmasosa tontin vuokrasta ja loput 30 € muista kuluista. Muodosta yhtälö ja ratkaise sen avulla vastikkeen suuruus.

**b)** Taloyhtiössä A kaksion hinta on 150 000 €. Taloyhtiössä B myydään samankokoinen asumisoikeusasunto hintaan 60 000 €. Asukas joutuu maksamaan yhtiövastikkeen sijaan kuukausittain asumisoikeusmaksun 700 €. Muodosta lausekkeet, jotka kuvaavat molempien asumismuotojen kokonaiskustannuksia $x$:n asumisvuoden jälkeen.

**c)** Kuinka monta vuotta on vähintään asuttava yhtiön A omistusasunnossa, jotta se olisi edullisempaa kuin asumisoikeusasunnossa asuminen?

**RATKAISU**

**a)** Merkitään vastikkeen suuruutta kirjaimella $y$ (€). Kulut jakautuvat tällöin seuraavasti:

| Lämmitys ja vesi (€) | Tontin vuokra (€) | Muut kulut (€) |
|---|---|---|
| $\frac{y}{2}$ | $\frac{y}{3}$ | 30 |

Kun kaikki kulut lasketaan yhteen, saadaan summaksi $y$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\frac{y}{2}+\frac{y}{3}+30=y$$

$$y=180$$

Laskintehtävissä pitää vastauksen lisäksi muistaa aina kirjoittaa näkyviin myös ratkaistava yhtälö.

Yhtiövastike on siis 180 €.

**b)** Kokonaiskustannukset muodostuvat alussa sijoitetusta pääomasta eli asunnon ostohinnasta ja vuotuisista kuluista.

| | A | B |
|---|---|---|
| **Sijoitettu pääoma** | 150 000 | 60 000 |
| **Maksut vuodessa** | $12 \cdot 180 = 2160$ | $12 \cdot 700 = 8400$ |

Kustannukset $x$:n asumisvuoden jälkeen ovat:

- yhtiössä A $\quad 150\,000 + 2160x$
- yhtiössä B $\quad 60\,000 + 8400x$

**c)** Muodostetaan epäyhtälö, josta aika voidaan ratkaista.

$$150\,000 + 2160x < 60\,000 + 8400x$$

$$x > \frac{375}{26}$$

Ratkaisu kannattaa esittää desimaalimuodossa $x > 14{,}42\ldots$
Ensimmäinen kokonaisluku, joka täyttää ehdon, on 15.

Yhtiössä A asuminen tulee edullisemmaksi, kun asumisaika on vähintään 15 vuotta.

**VASTAUS**

**a)** 180 €
**b)** yhtiössä A: $150\,000 + 2160x$ ja yhtiössä B: $60\,000 + 8400x$
**c)** 15 vuotta

# Tehtävät

## Yhtälön ratkaiseminen

**50.** Tutki, onko luku 7 yhtälön ratkaisu.

**a)** $2x - 18 = 3 - x$ **b)** $x^2 - 2x = 34$

**51.** Onko $x = 0$ yhtälön $\frac{x}{2} + 2x - 1 = \frac{x}{3} + x + 1$ ratkaisu?

**52.** Ratkaise yhtälö.

**a)** $4x = 20$ **b)** $-2x - 6 = 0$ **c)** $\frac{x}{3} = 6$

E1

**53.** Ratkaise yhtälö.

**a)** $2(3x - 1) - x = -4(2 + x)$ **b)** $7x + (3 + 2x) = 2 - (6 - 2x)$

**54.** Ratkaise yhtälö.

**a)** $3(4 - 2x) = 6 - 8x$ **b)** $5x(x - 1) = 5x^2 - (8 - 3x)$

**55.** Ratkaise yhtälö.

**a)** $2(a + 3) - 3(-3a - 4) = 4 - (7a + 2)$

**b)** $-5c - (1 - c) + 2(4c - 1) = c - (5c - 2)$

**56.** Ratkaise yhtälö.

**a)** $(3 + x) - (x - 3) = 0$ **b)** $4(x - 1) + 1 = x - 3(1 - x)$

E2

**57.** Määritä vakio $k$ siten, että luku $-2$ on yhtälön $x^3 - 2kx = 5$ ratkaisu.

**58.** Yhtälön $2ax + 5a - 2 = 20$ ratkaisuna on $x = 3$. Mikä on tällöin vakion $a$ arvo?

**59.** Millä vakion $k$ arvolla yhtälön $5(x - k) = 2x - 3$ ratkaisuna on $x = -3$?

**60.** Kolmen peräkkäisen luonnollisen luvun summa on 63. Määritä yhtälön avulla kyseiset luvut.

**61.** Suorakulmion kanta on 3 cm suurempi kuin korkeus. Määritä yhtälön avulla suorakulmion mitat, kun suorakulmion piiri on 30 cm.

**62.** Petra on tällä hetkellä 4 kertaa niin vanha kuin hänen pikkusiskonsa Lilli. 12 vuoden kuluttua Petra on kaksi kertaa niin vanha kuin Lilli. Muodosta yhtälö ja määritä sen avulla tyttöjen iät tällä hetkellä.

## Nimittäjien poistaminen

E3

**63.** Ratkaise yhtälö.

**a)** $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=5$

**b)** $3x-\frac{x-2}{2}=\frac{1}{6}$

**64.** Ratkaise yhtälö.

**a)** $2x-\frac{3x}{4}=\frac{1}{3}$

**b)** $-3x-1=\frac{5x}{2}$

**65.** Ratkaise yhtälö.

**a)** $\frac{x-1}{2}+2x=\frac{1}{3}$

**b)** $\frac{2x-5}{4}-\frac{3x-8}{6}=\frac{x}{12}$

**66.** Ratkaise yhtälö $\frac{3x+5}{2}-\frac{2x+7}{3}=\frac{5x+1}{6}$.

E4

**67.** Autovuokraamo Budjetti perii asiakkaalta vuokrauksen yhteydessä kiinteän maksun. Puolet maksusta on vakuutusta, neljäsosa polttoainekuluja ja loput 15 € toimistomaksuja.

**a)** Muodosta yhtälö ja ratkaise kiinteän maksun suuruus.

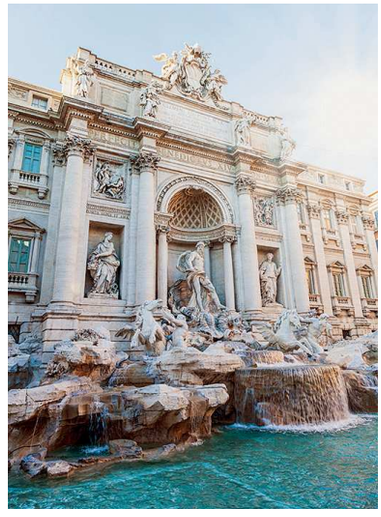
**b)** Autovuokraamo Budjetti laskuttaa jokaiselta ajokilometriltä lisäksi 0,20 €. Kilpaileva vuokraamo Hertta perii 40 € ja jokaiselta ajokilometriltä 0,30 €. Muodosta molemmille vuokraamoille auton vuokran kokonaiskustannuksia esittävä lauseke. Kuinka monta kilometriä on ajettava, jotta kannattaa valita Budjetti?

**68.** Kiiran käteen jäävästä palkasta kolmasosa menee asumiseen, kaksi viidesosaa ruokaan, kahdeksasosa vaatteisiin ja loput 150 € laskuihin ja muihin kuluihin. Kuinka paljon Kiira saa kuukausipalkkaa puhtaana käteen?

**69.** Lentoyhtiön sivulla myydään matkapakettia Roomaan. Paketti sisältää 250 €:n kiinteähintaisen lennon ja hotellihuoneen 80 €:n vuorokausihintaan.

**a)** Määritä lauseke, joka kuvaa matkapaketin hintaa, kun yöpymisiä hotellissa on $x$ kappaletta.

**b)** Henri maksaa matkastaan 1290 €. Kuinka monta yötä hän on hotellissa?



## Sekalaisia

**70.** Ratkaise yhtälö.

**a)** $3(2x-1)-(-2x+7)=5x-4$

**b)** $3x(x+3)=x^2-(6-2x^2)$

**71.** Ratkaise yhtälö.

**a)** $\dfrac{2x-3}{3}+4=\dfrac{2-x}{5}$ **b)** $\dfrac{8-3x}{6}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{x}{2}$

**72.** Määritä $a$ siten, että yhtälöllä $\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{1}{2}x+4a=0$ on ratkaisu $x=3$.

**73.** Ratkaise yhtälö $\dfrac{7x+\frac{1}{2}}{3}-\dfrac{3x-\frac{1}{3}}{2}=2$. [K2012, 3a]

**74.** Millä $p$:n arvolla lauseke $p+\dfrac{p}{2}+\dfrac{p}{4}$ saa arvon 2?

---

**75.** Luokan opiskelijoista kolme neljäsosaa päätti osallistua vanhojentansseihin. Vanhojenpäivänä kolme tanssijaa oli sairaana, jolloin tansseihin osallistujia oli 10 vähemmän kuin luokalla on opiskelijoita. Muodosta tilannetta kuvaava yhtälö ja ratkaise luokan opiskelijoiden määrä.

# 2.2 Ensimmäisen asteen polynomifunktio

**Pohdinta**

Funktio $f$ esittää veden määrää vesisäiliössä (litroina) ajan $x$ (tunteja) funktiona. Päättele funktion $f$ kuvaajan avulla,

**a)** kuinka paljon vettä säiliössä on, kun se on täynnä

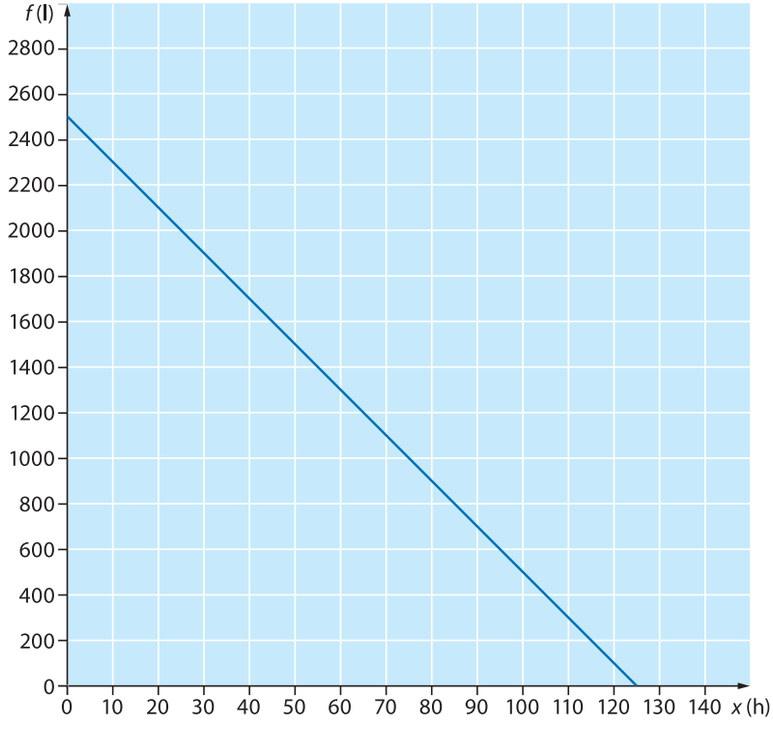
**b)** kuinka paljon vettä säiliössä on 40 tunnin kuluttua tyhjentymisen alkamisesta

**c)** miten kauan kestää säiliön tyhjeneminen

**d)** mitä arvoja muuttuja $x$ voi saada

**e)** kuinka monta litraa vettä säiliöstä tyhjenee tunnin aikana

**f)** funktion $f$ lauseke muuttujan $x$ avulla ilmaistuna.



Ensimmäisen asteen polynomi sisältää ensimmäisen asteen termin ja vakiotermin, joka voi olla myös nolla. Esimerkiksi $2x - 3$ on ensimmäisen asteen polynomi. Annetaan polynomille nimi $f$, jolloin voidaan merkitä $f(x) = 2x - 3$.

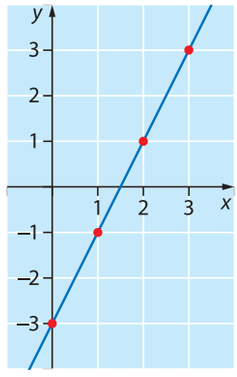
Lasketaan polynomin arvoja sijoittamalla eri lukuja muuttujan $x$ paikalle.

| $x$ | $f(x) = 2x - 3$ |
|---|---|
| 0 | $f(0) = 2 \cdot 0 - 3 = -3$ |
| 1 | $f(1) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$ |
| 2 | $f(2) = 2 \cdot 2 - 3 = 1$ |
| 3 | $f(3) = 2 \cdot 3 - 3 = 3$ |

Jokaista muuttujan $x$ arvoa vastaa tietty polynomin arvo eli polynomin arvo on muuttujan $x$ **funktio**. Kun muuttujan arvo $x$ kasvaa yhdellä, polynomin arvo kasvaa aina kahdella. Riippuvuutta voidaan havainnollistaa koordinaatistossa. Muuttujan arvoa vastaa koordinaatiston pisteen $x$-koordinaatti ja polynomin arvoa pisteen $y$-koordinaatti.

$y = f(x)$

| $x$ | $y$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| 0 | –3 | (0, –3) |
| 1 | –1 | (1, –1) |
| 2 | 1 | (2, 1) |
| 3 | 3 | (3, 3) |




Koska pisteet sijaitsevat suoralla, riippuvuutta sanotaan **lineaariseksi**.

Polynomi $f(x) = 2x - 3$ on esimerkki **ensimmäisen asteen polynomifunktiosta** eli **lineaarisesta funktiosta**. Lineaarisen funktion kuvaaja on aina suora.

**Ensimmäisen asteen polynomifunktio**

Funktiota, jonka lauseke on muotoa

$$f(x) = ax + b$$

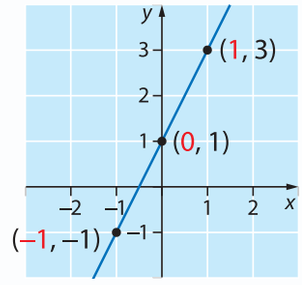
- $a \neq 0$
- $a \in \mathbf{R}$ ja $b \in \mathbf{R}$

sanotaan ensimmäisen asteen polynomifunktioksi.

Funktion kuvaaja voidaan piirtää, jos tunnetaan riittävän monta kuvaajan pistettä. Suoran piirtämiseen riittää kaksi pistettä, mutta yleensä kannattaa laskea kolmaskin piste. Kuvaajan pisteitä lasketaan valitsemalla muutamia muuttujan arvoja ja sijoittamalla arvot funktion lausekkeeseen.

**$f(x) = 2x + 1$**

| $x$ | $y = f(x)$ | $(x, y)$ |
|---|---|---|
| $-1$ | $y = 2 \cdot (-1) + 1 = -1$ | $(-1, -1)$ |
| $0$ | $y = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ | $(0, 1)$ |
| $1$ | $y = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ | $(1, 3)$ |

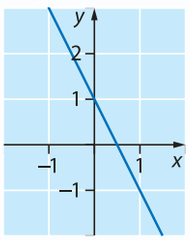


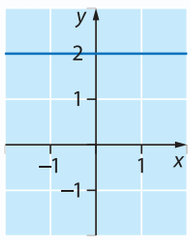

Ensimmäisen asteen polynomifunktion kuvaajan kulkusuunta riippuu muuttujatermin kertoimesta $a$.

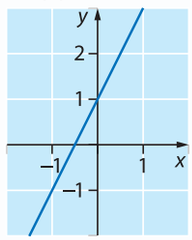
Kun $a = 0$, niin funktio on vakiofunktio.

**$f(x) = ax + b$**

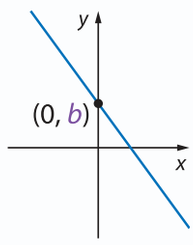
| $a < 0$ | $a = 0$ | $a > 0$ |
|---|---|---|
| Suora on laskeva. | Suora on $x$-akselin suuntainen. | Suora on nouseva. |
| $f(x) = -2x + 1$ | $f(x) = 0x + 2 = 2$ | $f(x) = 2x + 1$ |



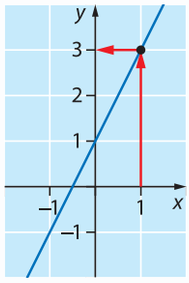




Funktion $f$ lausekkeen $ax + b$ vakiotermistä $b$ voidaan päätellä piste, jossa suora leikkaa $y$-akselin.

| | | |
|---|---|---|
| **$f(x) = ax + b$** | Suora leikkaa $y$-akselin pisteessä $(0, b)$. |  |

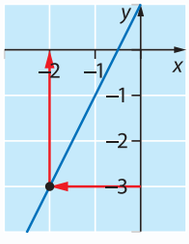
Funktion kuvaajalta voidaan päätellä funktion arvo kullakin muuttujan $x$ arvolla. Funktion arvo luetaan $y$-akselilta. Jos funktion lauseke tunnetaan, funktion arvo voidaan laskea sijoittamalla muuttujakirjaimen paikalle haluttu luku.

**$f(x) = 2x + 1$**

| Funktion $f$ arvo, kun $x = 1$ eli $f(1)$ | Kuvaajan avulla:   Kun $x = 1$, niin $y = 3$. $f(1) = 3$ | Laskemalla: $f(1) = 2 \cdot 1 + 1$ $= 3$ |
|---|---|---|

Kuvaajalta voidaan päätellä myös funktion arvoa vastaava muuttujan arvo, joka luetaan $x$-akselilta. Jos funktion lauseke tunnetaan, se voidaan ratkaista yhtälön avulla.

**$f(x) = 2x + 1$**

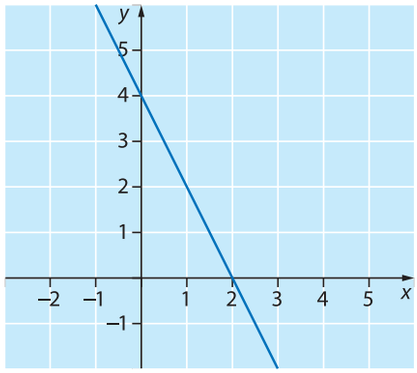
| Muuttujan $x$ arvo, kun $y = -3$ eli $f(x) = -3$ | Kuvaajan avulla:   Kun $y = -3$, niin $x = -2$. $f(x) = -3$, kun $x = -2$ | Laskemalla: $f(x) = -3$ $2x + 1 = -3$ $2x = -4 \quad \vert : 2$ $x = -2$ |
|---|---|---|

Funktion tai muuttujan arvoja ei yleensä lueta kuvaajalta, ellei tehtävänanto niin edellytä.

**ESIMERKKI 1**

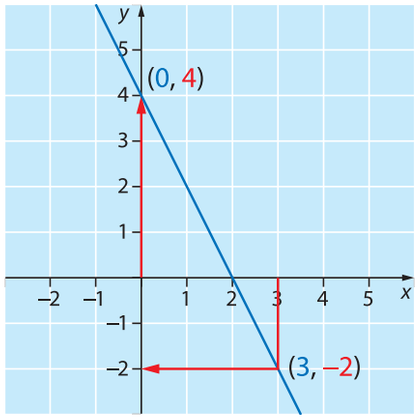
Alla on esitetty polynomifunktion $f$ kuvaaja. Päättele kuvaajan avulla

**a)** funktion arvot $f(0)$ ja $f(3)$
**b)** se muuttujan arvo, jolla $f(x) = 2$
**c)** yhtälön $f(x) = 0$ ratkaisu
**d)** epäyhtälön $f(x) > 0$ ratkaisu.




**RATKAISU**

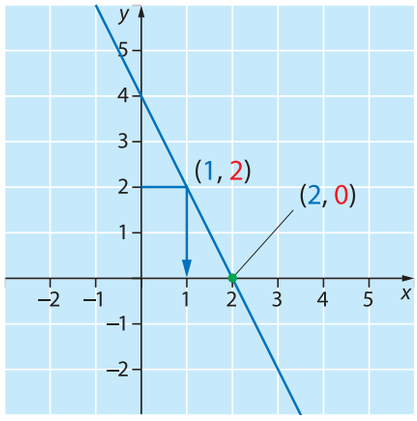
**a)** Funktion arvot vastaavat koordinaatistossa $y$-akselin arvoja. Funktion arvot $f(0)$ ja $f(3)$ ovat siis muuttujan arvoja $x = 0$ ja $x = 3$ vastaavien kuvaajan pisteiden $y$-koordinaatit.




$f(0) = 4$

$f(3) = -2$

**b)** Yhtälön $f(x) = 2$ ratkaisu löytyy kuvaajasta siitä pisteestä, jossa $y$-koordinaatti saa arvon 2.

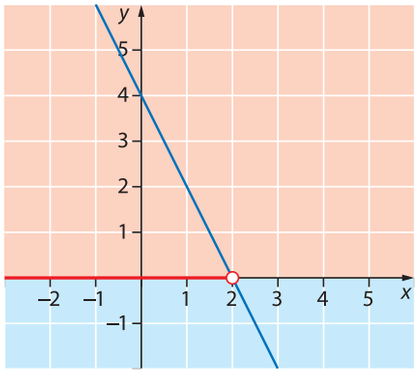



$f(x) = 2$, kun $x = 1$.

**c)** Yhtälön $f(x) = 0$ ratkaisu on funktion nollakohta eli kohta, jossa $f$ saa arvon 0. Tässä kohdassa kuvaaja leikkaa $x$-akselin.

$f(x) = 0$, kun $x = 2$.

**d)** Kun $f(x) > 0$, funktion arvot ovat positiivisia. Funktion kuvaaja kulkee tällöin $x$-akselin yläpuolella.




$x < 2$

**VASTAUS**

**a)** $f(0) = 4$, $f(3) = -2$ **b)** $x = 1$
**c)** $x = 2$ **d)** $x < 2$

**ESIMERKKI 2**

Tutkitaan funktiota $f(x) = 2x - 4$.

**a)** Laske $f(-1)$, $f(3)$ ja $f(4)$.

**b)** Piirrä funktion $f$ kuvaaja.

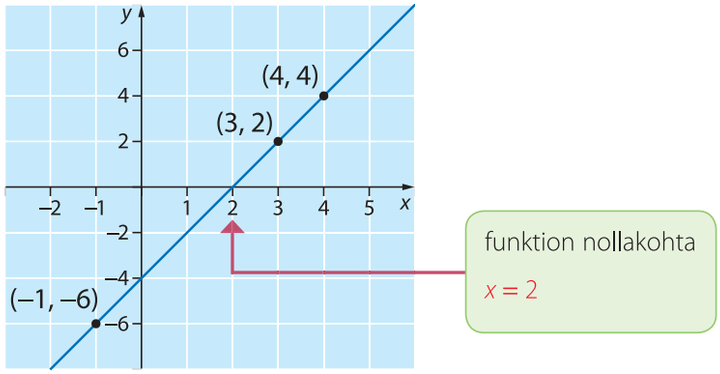
**c)** Määritä funktion nollakohta sekä laskemalla että kuvaajan avulla.

**RATKAISU**

**a)** Lasketaan funktion arvot kohdissa –1, 3 ja 4.

$f(-1) = 2 \cdot (-1) - 4 = -6$
$f(3) = 2 \cdot 3 - 4 = 2$
$f(4) = 2 \cdot 4 - 4 = 4$

**b)** Koska $f$ on ensimmäisen asteen polynomifunktio, sen kuvaaja on suora. Suora voidaan piirtää edellisessä kohdassa laskettujen funktion arvojen avulla, koska nyt suoralta tunnetaan kolme pistettä: (–1, –6), (3, 2) ja (4, 4). Sijoitetaan pisteet koordinaatistoon ja piirretään pisteiden kautta kulkeva suora.




**c)** Funktion nollakohta määritetään ratkaisemalla yhtälö $f(x) = 0$.

$2x - 4 = 0$
$2x = 4 \quad | :2$
$x = 2$

Kuvasta nollakohta voidaan lukea kohdasta, jossa kuvaaja leikkaa $x$-akselin.

**VASTAUS** **a)** $f(-1) = -6$, $f(3) = 2$, $f(4) = 4$ **c)** $x = 2$

**ESIMERKKI 3**

Pikajunan etäisyyttä (km) Helsingistä voidaan mallintaa lineaarisella funktiolla $s(x) = 450 - 120x$, missä $x$ on matka-aika tunteina.

**a)** Mikä on junan etäisyys Helsingistä matkan alkaessa?

**b)** Kuinka kauan matka Helsinkiin kestää? Anna vastaus tunteina ja minuutteina.

**c)** Mikä on junan keskinopeus matkalla?

**RATKAISU**

**a)** Matkan alkaessa aikaa ei ole vielä kulunut yhtään tuntia eli $x = 0$. Lasketaan $s(0)$.

Funktion lausekkeen voi tallentaa laskimen muistiin. Funktion arvo saadaan tämän jälkeen esimerkiksi merkinnällä $s(0)$.

$$s(0) = 450 - 120 \cdot 0 = 450$$

Juna on siis 450 km:n päässä Helsingistä.

**b)** Kun saavutaan Helsinkiin, etäisyys sieltä on 0. On siis ratkaistava yhtälö $s(x) = 0$ eli määritettävä funktion $s$ nollakohta.

$$s(x) = 0$$
$$450 - 120x = 0$$
$$x = 3{,}75$$

Laskimista löytyy toiminto yhtälön ratkaisua varten. Etsi tämä toiminto omasta laskimestasi.

Matka-aika on siis 3 h 0,75 · 60 min = 3 h 45 min.

**c)** Junan keskinopeus saadaan jakamalla matkan pituus matka-ajalla.

Keskinopeus $v = \frac{s}{t}$, $s$ on matka, $t$ on aika

$$\frac{450 \text{ km}}{3{,}75 \text{ h}} = 120 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

**VASTAUS** **a)** 450 km **b)** 3 h 45 min **c)** 120 km/h

**ESIMERKKI 4**

Osa molekyylin energiasta on aina sitoutuneena sen atomien välisiin kovalenttisiin sidoksiin. Sitoutuneen energian määrä $E$ (kJ) riippuu lineaarisesti sidoksen pituudesta $x$ (pikometriä pm):
$E(x) = 588 - 1{,}702x$.

**a)** Kuinka paljon energiaa on sitoutunut sidokseen, jonka pituus 250 pm?

**b)** Laske sellaisen sidoksen pituus, johon on sitoutunut energiaa 215 kJ.

**c)** Piirrä laskimella funktion kuvaaja ja määritä kuvasta funktion nollakohta. Arvioi mallin toimivuutta nollakohdassa.

**RATKAISU**

**a)** Kun sidoksen pituus on 250 pm, vastaava energia saadaan sijoittamalla funktion lausekkeeseen $x = 250$.

Lisämateriaali: Vastauksen tarkkuus s. 149

$E(250) = 588 - 1{,}702 \cdot 250 = 162{,}5 \approx 163$ (kJ)

**b)** Kun energiaa on 215 kJ, sidoksen pituus saadaan ratkaisemalla yhtälö $E(x) = 215$.

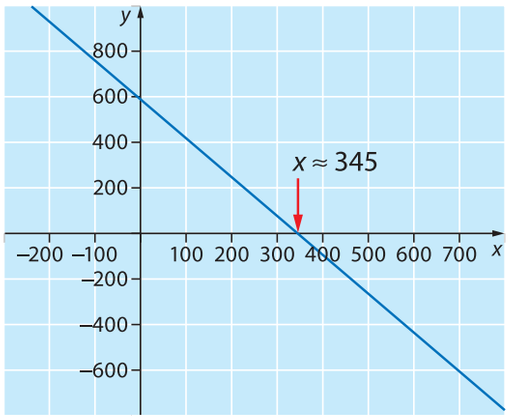
$$E(x) = 215$$
$$588 - 1{,}702x = 215$$
$$x = 219{,}15...$$
$$x \approx 219$$

Muista aina kirjoittaa ratkaistava yhtälö näkyviin.

Sidoksen pituus on 219 pm.

**c)** Nollakohdassa funktion kuvaaja leikkaa $x$-akselin. Kuvasta nähdään, että nollakohta on likimain $x \approx 345$.

Etsi laskimestasi toiminto, jolla saat selvitettyä kuvaajasta $x$-akselin leikkauspisteen koordinaatit.




Malli ei ole järkevä nollakohdassa, koska sidokseen sitoutunut energia ei voi koskaan saada arvoa nolla.

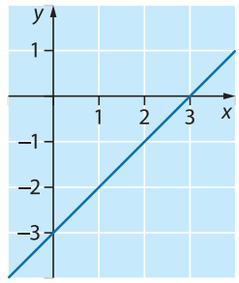
**VASTAUS** **a)** 163 kJ **b)** 219 pm **c)** 345 pm

# Tehtävät

E1

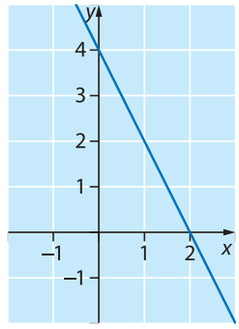
**76.** Tutki polynomifunktion $f$ kuvaajaa.
Päättele kuvaajan avulla

**a)** funktion arvot $f(0)$ ja $f(2)$
**b)** kohta, jossa $f(x) = -2$
**c)** yhtälön $f(x) = 0$ ratkaisu
**d)** epäyhtälön $f(x) < 0$ ratkaisu.




**77.** Vieressä on funktion $g$ kuvaaja.
Vastaa kuvaajan avulla kysymyksiin.

**a)** Mikä on funktion arvo kohdassa $x = 1$?
**b)** Millä muuttujan arvolla $g(x) = 4$?
**c)** Mikä on funktion nollakohta?
**d)** Millä muuttujan $x$ arvoilla funktion arvot ovat positiivisia?




E2

**78.** Olkoon $f(x) = -3x + 3$.

**a)** Laske funktion arvot $f(-1)$, $f(0)$ ja $f(2)$.
**b)** Piirrä funktion kuvaaja.
**c)** Määritä funktion nollakohta sekä kuvaajan avulla että laskemalla.

**79.** Tarkastellaan funktiota $f(x) = 4x - 6$. Funktion kuvaaja on suora. Päättele piirtämättä

**a)** onko suora nouseva vai laskeva
**b)** piste, jossa suora leikkaa $y$-akselin
**c)** piste, jossa suora leikkaa $x$-akselin.

**80.** Piirrä funktion $g(x) = -2x + 6$ kuvaaja. Etsi kuvaajan avulla koordinaattiakselien leikkauspisteet.

---

**81.** Piirrä laskimella funktion $h(x) = 150x + 600$ kuvaaja. Päättele kuvaajan avulla

**a)** $h(-20)$ ja $h(40)$
**b)** se muuttujan $x$ arvo, jolla $h(x) = 3000$
**c)** funktion $h$ nollakohta.

Piirrä mallikuva ja merkitse kuvaan pisteet, joista ratkaisut on päätelty.

E3

**82.** Taksimatkan hinta $h$ kaupunkialueella riippuu lineaarisesti matkan pituudesta $x$ (km)seuraavasti:

$h(x) = 9{,}00 + 2{,}40x$.

**a)** Hinnassa on aloitusmaksu, joka on maksettava riippumatta matkan pituudesta. Millä muuttujan $x$ arvolla se voidaan määrittää? Kuinka suuri se on?

**b)** Kuinka suuri on maksu, kun ajetaan 2,5 km?

**c)** Kuinka pitkä matka taksilla kuljettiin, kun maksu oli 19,32 €?

**83.** Biologit tutkivat hyötypuulajien menestymistä eri ilmastovyöhykkeillä. He havaitsivat, että vuotuisen pituuskasvun ja keskimääräisen valoisien tuntien määrän välillä vallitsi lineaarinen riippuvuus. Jos valoisia tunteja vuorokaudessa oli $x$, pituuskasvua senttimetreinä voitiin mallintaa funktiolla $f(x) = 3{,}5x - 12$.

**a)** Kuinka monta senttimetriä puu kasvaa, jos vuorokaudessa on valoisia tunteja keskimäärin 6,2?

**b)** Kuinka monta valoisaa tuntia 13,5 cm:n pituuskasvu vaatii?

**c)** Milloin pituuskasvua ei enää tapahdu?

**84.** Pitkän aikavälin tutkimuksissa on havaittu, että bruttokansantuotteen (BKT) ja eliniän odotteen välillä vallitsee lineaarinen riippuvuus. Jos BKT on $x$ euroa, eliniän odotetta vuosina voidaan mallintaa funktiolla $e(x) = 0{,}0002x + 76{,}034$.

**a)** Vuonna 2002 BKT Suomessa oli 26 863 €. Mikä oli tällöin eliniän odote? Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.

**b)** Vuonna 1978 eliniän odote oli 77,6 vuotta. Mikä oli mallin mukaan BKT samana vuonna?

**c)** Määritä $e(0)$. Arvioi mallin toimivuutta tässä kohdassa.

E4

**85.** Supermarketin virvoitusjuomien päivämyynti kesäaikana $m$ (litraa) riippui lineaarisesti päivän ylimmästä lämpötilasta $x$ (°C) seuraavasti: $m(x) = 34{,}5x + 875{,}5$.

**a)** Kuinka monta litraa juomia myytiin, jos päivän ylin lämpötila oli 25 °C?

**b)** Mikä oli päivän ylin lämpötila, kun juomia myytiin 1500 litraa?

**c)** Piirrä laskimella funktion kuvaaja ja määritä kuvaajan avulla funktion nollakohta. Onko malli järkevä nollakohdassa?

**86.** Matematiikan kokeen arvosana riippuu lineaarisesti pistemäärästä. Kun pistemäärä on $x$, arvosanaa voidaan mallintaa funktiolla $p(x) = 0{,}2x + 4$. Piirrä laskimella funktion $p$ kuvaaja ja päättele sen avulla

**a)** arvosana, kun pistemäärä on 25

**b)** pistemäärä, jolla saa arvosanan 10

**c)** pistemäärä, jolla saa arvosanan 7.

Piirrä mallikuva ja merkitse kuvaan pisteet, joista ratkaisut on päätelty.

**87.** Suurella metsäalueella tutkittiin jäniksiä syövien eläinten lukumäärän ja jänisten lukumäärän välistä riippuvuutta. Jos jänisten lukumäärä oli $x$ (kpl), petoeläimien lukumäärää voitiin mallintaa funktiolla $f(x) = 0{,}125x + 25{,}5$, $100 \leq x \leq 1200$.

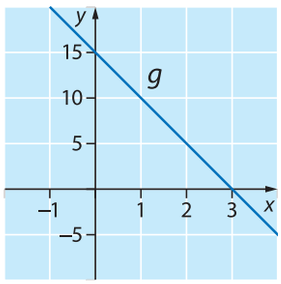
**a)** Piirrä laskimella funktion kuvaaja ja arvioi kuvaajasta petojen määrä, kun jäniksiä on 500.

**b)** Ratkaise ilman kuvaajaa, kuinka suuri on jänispopulaation oltava, jos alueella elää 50 petoa.

**c)** Malli on voimassa, kun muuttuja $x$ on välillä $[100, 1200]$. Miksi malli ei ole järkevä, kun muuttuja $x$ saa arvoja, jotka ovat lähellä nollaa?

## Sekalaisia

**88.** Päättele lineaarisen funktion $g$ kuvaajasta




**a)** $g(1)$ ja $g(0)$

**b)** yhtälön $g(x) = 5$ ratkaisu

**c)** funktion $g$ nollakohta

**d)** epäyhtälön $g(x) < 0$ ratkaisu.

**89.** Olkoon $f(x) = -6x + 3$.

**a)** Laske $f(-4)$.

**b)** Ratkaise funktion nollakohta.

**c)** Piirrä funktion kuvaaja.

**90.** Lineaarisen funktion $f(x) = -ax + 3a$ kuvaaja kulkee pisteen $(-1, 3)$ kautta. Määritä vakio $a$.

**91.** Eräässä tutkimuksessa saatiin henkilön painon $p$ (kg) ja pituuden $x$ (cm) välille lineaarinen riippuvuus

$$p(x) = 1{,}236x - 149{,}3.$$

Piirrä laskimella funktion $p$ kuvaaja. Vastaa kuvaajan avulla kysymyksiin. Esitä ratkaisussasi mallikuva, johon on merkitty kohdat, joista vastaukset on päätelty.

**a)** Kuinka paljon painaa tämän mallin mukaan henkilö, jonka pituus on 160 cm?

**b)** Minkä pituinen henkilö painaa 72,0 kg?

**92.** Etanolista ja vedestä valmistetaan seos, jonka tilavuus on $V$ litraa. Jos veden tilavuus tästä seoksesta on $x$ litraa, seoksen massaa $m$ (kg) voidaan mallintaa funktiolla

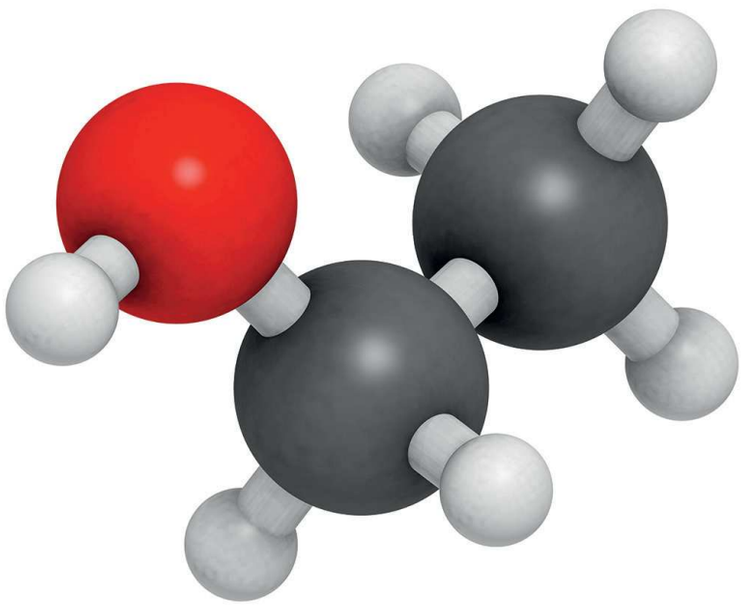
$$m(x) = x + 0{,}79(V - x).$$

Olkoon seoksen tilavuus 3,0 litraa.

**a)** Kuinka paljon seos painaa, jos vettä on 700 ml?

**b)** Seoksen massa on 2,92 kg. Kuinka monta litraa vettä seos sisältää?

**c)** Piirrä laskimella funktion $m$ kuvaaja, kun $V = 3{,}0$. Päättele kuvaajasta, millä muuttujan $x$ arvoilla malli on järkevä.



# 2.3 Toisen asteen yhtälö

**Pohdinta**

**a)** Poimi toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$ kertoimet $a$, $b$ ja $c$.

| Yhtälö $ax^2 + bx + c = 0$ | $a$ | $b$ | $c$ |
|---|---|---|---|
| $5x^2 + 8x - 6 = 0$ | | | |
| $-x^2 - 3x + 1 = 0$ | | | |
| $-2x^2 + 4x = -3$ | | | |
| $7x^2 - 28 = 0$ | | | |
| $-x^2 = -1$ | | | |
| $-3x^2 + 12x = 0$ | | | |
| $x^2 = 3x$ | | | |

**b)** Muodosta toisen asteen yhtälö $ax^2 + bx + c = 0$ annettujen tietojen perusteella.

| $a$ | $b$ | $c$ | $ax^2 + bx + c = 0$ |
|---|---|---|---|
| 2 | $-3$ | 5 | $2x^2 - 3x + 5 = 0$ |
| $-1$ | 0 | 3 | |
| 1 | 4 | $-2$ | |
| 6 | $-5$ | 0 | |
| $\frac{1}{2}$ | $-1$ | $-\frac{3}{5}$ | |

## Ratkaisukaava

Toisen asteen polynomi sisältää termejä, joiden asteluku on korkeintaan kaksi. Tällainen polynomi voidaan sieventää muotoon $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Jos yhtälö voidaan sieventää muotoon $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, sitä kutsutaan **toisen asteen yhtälöksi**.

| Toisen asteen polynomi | Toisen asteen yhtälö |
|---|---|
| $-x^2 - 3x + 1$ | $-x^2 - 3x + 1 = 0$ |
| $2x^2 - 6x$ | $2x^2 - 6x = 0$ |
| $-3x^2 + 3$ | $-3x^2 + 3 = 0$ |

Toisen asteen yhtälöä, josta puuttuu vakiotermi, ensimmäisen asteen termi tai molemmat, kutsutaan **vaillinaiseksi toisen asteen yhtälöksi**. **Täydellinen toisen asteen yhtälö** sisältää kaikki kolme eri asteluvun termiä.

| | Yleinen muoto | Esimerkki |
|---|---|---|
| **Täydellinen toisen asteen yhtälö** $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$ | $ax^2 + bx + c = 0$ | $-x^2 - 3x + 1 = 0$ |
| **Vaillinainen toisen asteen yhtälö** $c = 0$ | $ax^2 + bx = 0$ | $2x^2 - 6x = 0$ |
| **Vaillinainen toisen asteen yhtälö** $b = 0$ | $ax^2 + c = 0$ | $-3x^2 + 7 = 0$ |

Kaikki toisen asteen yhtälöt voidaan ratkaista ratkaisukaavan avulla. Vaillinaiset toisen asteen yhtälöt voidaan ratkaista myös ilman ratkaisukaavaa.

Lisämateriaali: Neliöjuuri s. 153

**Toisen asteen yhtälön ratkaisukaava**

Toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ ratkaisut ovat

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- $a$ on toisen asteen termin kerroin.
- $b$ on ensimmäisen asteen termin kerroin.
- $c$ on vakio.

Ratkaisukaavaa voidaan käyttää, jos yhtälö on sievennetty muotoon $ax^2 + bx + c = 0$.

Toisen asteen yhtälön ratkaisemisessa on seuraavat vaiheet:

1. Toisen asteen yhtälö sievennetään ensin muotoon, jossa yhtälön toisella puolella on nolla.
2. Toisen asteen polynomista poimitaan termien kertoimet $a$, $b$ ja $c$.
3. Sijoitetaan kertoimia vastaavat lukuarvot ratkaisukaavaan ja lasketaan merkityt laskutoimitukset.

**ESIMERKKI 1**

Ratkaise yhtälö $x^2 - 2x - 3 = 0$.

**RATKAISU**

Yhtälö on valmiiksi muodossa $ax^2 + bx + c = 0$. Poimitaan yhtälöstä kertoimet $a$, $b$ ja $c$ ja sijoitetaan ne ratkaisukaavaan.

$a = 1$, $b = -2$ ja $c = -3$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$$

Lasketaan ensin juurrettavan arvo:
$(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16$.

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 4}{2}$$

Kirjoitetaan osoittaja kahtena eri lausekkeena:
$2 + 4$ ja $2 - 4$.

$$x = \frac{2+4}{2} = 3 \quad \text{tai} \quad x = \frac{2-4}{2} = -1$$

**VASTAUS**

$x = 3$ tai $x = -1$

**ESIMERKKI 2**

Ratkaise yhtälö.

**a)** $-x^2 = 3x$ **b)** $4x^2 - 4x = -1$

**RATKAISU**

**a)** Sievennetään yhtälö ensin muotoon $ax^2 + bx + c = 0$.

$$-x^2 = 3x$$

$$-x^2 - 3x = 0$$

Tässä yhtälössä $a = -1$, $b = -3$ ja $c = 0$. Sijoitetaan nämä ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 0}}{-2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9}}{-2}$$

$$x = \frac{3 \pm 3}{-2}$$

$$x = \frac{3+3}{-2} = \frac{6}{-2} = -3 \quad \text{tai} \quad x = \frac{3-3}{-2} = \frac{0}{-2} = 0$$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

**b)** Sievennetään yhtälö ensin muotoon $ax^2 + bx + c = 0$.

$$4x^2 - 4x = -1$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

Tässä yhtälössä $a = 4$, $b = -4$ ja $c = 1$. Sijoitetaan nämä ratkaisukaavaan.

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{8}$$

$$x = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Koska osoittajan jälkimmäinen yhteenlaskettava on nolla, yhtälöllä on vain yksi ratkaisu.

**VASTAUS** **a)** $x = -3$ tai $x = 0$ **b)** $x = \dfrac{1}{2}$

**ESIMERKKI 3**

Ratkaise yhtälö.

**a)** $-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{5}{6}=0$ **b)** $20x^2+50x-10=0$

**RATKAISU**

**a)** Poistetaan ensin nimittäjät ja ratkaistaan sitten yhtälö ratkaisukaavalla.

$$-\overset{3)}{\frac{1}{2}}x^2+\overset{2)}{\frac{2}{3}}x-\frac{5}{6}=0$$

$$-\frac{3}{6}x^2+\frac{4}{6}x-\frac{5}{6}=0 \qquad \big|\cdot 6$$

$a=-3,\ b=4,\ c=-5$ → $-3x^2+4x-5=0$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ →

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot(-3)\cdot(-5)}}{2\cdot(-3)}$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-60}}{-6}$$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{-44}}{-6}$$

Koska juurrettava $-44<0$, neliöjuurelle $\sqrt{-44}$ ei voida laskea arvoa eikä yhtälöllä ole tällöin ratkaisua.

**b)** Yhtälö on valmiiksi muodossa $ax^2+bx+c=0$. Kaikki kertoimet ovat kuitenkin jaollisia luvulla 10. Yhtälö on helpompi ratkaista pienemmillä kertoimilla, joten jaetaan yhtälö puolittain luvulla 10.

$$20x^2+50x-10=0 \qquad \big|:10$$

$a=2,\ b=5,\ c=-1$ → $2x^2+5x-1=0$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2}$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25+8}}{4}$$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{33}}{4}$$

Neliöjuuren arvoa ei voida laskea ilman laskinta, joten vastaus jää lausekkeen muotoon.

**VASTAUS** **a)** Ei ratkaisua **b)** $x=\frac{-5\pm\sqrt{33}}{4}$

## Vaillinainen toisen asteen yhtälö

Toisen asteen yhtälö on vaillinainen, jos siitä puuttuu joko ensimmäisen asteen termi tai vakiotermi.

| Vaillinainen toisen asteen yhtälö | |
|---|---|
| $ax^2 + bx = 0$ | $ax^2 + c = 0$ |
| $x^2 - 3x = 0$<br>$2x^2 - 6x = 0$<br>$6x^2 = 3x$ | $4x^2 - 6 = 0$<br>$-3x^2 + 7 = 0$<br>$x^2 = 25$ |

Kaikki toisen asteen yhtälöt voidaan ratkaista ratkaisukaavan avulla. Vaillinaiset toisen asteen yhtälöt voidaan kuitenkin ratkaista myös ilman ratkaisukaavaa.

### 1. Yhtälö $ax^2 + bx = 0$

Tarkastellaan vaillinaista toisen asteen yhtälöä $x^2 - 3x = 0$. Polynomin $x^2 - 3x$ kummassakin termissä esiintyy tuntematon $x$. Polynomi voidaan tällöin kirjoittaa tulomuodossa, kun erotetaan tuntematon $x$ yhteiseksi tekijäksi.

$$x^2 - 3x = x \cdot x - 3 \cdot x = x(x - 3)$$

Osittelulaki
$a(b + c) = ab + ac$

Yhtälö voidaan siis kirjoittaa muodossa $x(x - 3) = 0$.

Yhtälö saadaan ratkaistua **tulon nollasäännön avulla**. Tulon nollasäännön mukaan tulo on nolla, kun jokin tulon tekijöistä on nolla. Tutkitaan siis, milloin jompikumpi tulon tekijöistä on nolla.

$$x \cdot (x - 3) = 0$$

$x = 0$ tai $x - 3 = 0$

$x = 3$

Tulon tekijät ovat:
$x$ ja $(x - 3)$

Yhtälön $x^2 - 3x = 0$ ratkaisu on $x = 0$ tai $x = 3$.

**ESIMERKKI 4**

Ratkaise yhtälö

**a)** $(x+2)(x-3)=0$ **b)** $4x^2-x=0$ **c)** $2x=10x^2$

**RATKAISU**

**a)** Yhtälön vasen puoli on tulomuodossa. Voidaan siis soveltaa tulon nollasääntöä. Merkitään tulon tekijät erikseen yhtä suuriksi kuin nolla.

$$(x+2)(x-3)=0$$

$$x+2=0 \quad \text{tai} \quad x-3=0$$

$$x=-2 \qquad\qquad x=3$$

**b)** Lausekkeesta $4x^2-x$ puuttuu vakiotermi, joten siitä voidaan erottaa yhteinen tekijä $x$.

$$4x^2-x=0$$

$$4\cdot x\cdot x-1\cdot x=0$$

$$x(4x-1)=0$$

Tulon nollasäännön mukaan

$$x=0 \quad \text{tai} \quad 4x-1=0$$

$$4x=1 \quad \big| :4$$

$$x=\frac{1}{4}$$

**c)** Siirretään kaikki termit ensin yhtälön vasemmalle puolelle, jonka jälkeen voidaan erottaa yhteinen tekijä.

$$2x=10x^2$$

$$-10x^2+2x=0$$

$$-10\cdot x\cdot x+2\cdot x=0$$

$$x(-10x+2)=0$$

$$x=0 \quad \text{tai} \quad -10x+2=0$$

$$-10x=-2 \quad \big| :(-10)$$

$$x=\frac{-2}{-10}=\frac{1}{5}$$

1. Kirjoita yhtälö muodossa $ax^2+bx=0$.
2. Erota $x$ yhteiseksi tekijäksi.
3. Ratkaise yhtälö tulon nollasäännön avulla.

**VASTAUS** **a)** $x=-2$ tai $x=3$ **b)** $x=0$ tai $x=\frac{1}{4}$ **c)** $x=0$ tai $x=\frac{1}{5}$

## 2. Yhtälö $ax^2 + c = 0$

Vaillinainen toisen asteen yhtälö $ax^2 + c = 0$ sisältää vain toisen asteen termin ja vakiotermin. Esimerkiksi $2x^2 - 32 = 0$ on tällainen yhtälö. Nämä yhtälöt voidaan sieventää muotoon, jossa yhtälön vasemmalla puolella on ratkaistavan tuntemattoman neliö ja oikealla puolella vakiotermi.

**1** Siirretään vakiotermi yhtälö oikealle puolelle.

$$2x^2 - 32 = 0$$

**2** Jaetaan yhtälön molemmat puolet ratkaistavan tuntemattoman kertoimella.

$$2x^2 = 32 \quad | : 2$$
$$x^2 = 16$$

Koska luvun 4 toinen potenssi on 16 eli $4^2 = 16$, yhtälön eräs ratkaisu on $x = 4$.

Myös negatiivisen luvun neliö on positiivinen luku: $(-4)^2 = 16$. Yhtälöllä on siis toinenkin ratkaisu, $x = -4$.

Positiivinen ratkaisu saadaan laskemalla neliöjuuri yhtälön oikealla puolella olevasta vakiotermistä. Yhtälön toinen ratkaisu on ensimmäisen ratkaisun vastaluku.

Lisämateriaali: Neliöjuuri s. 153

$$x = \sqrt{16} = 4 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{16} = -4$$

Yhtälön $x^2 = 16$ ratkaisu voidaan merkitä lyhyesti $x = \pm 4$.

Vaillinaisella yhtälöllä $ax^2 + c = 0$ on toisen asteen yhtälöiden tapaan enintään kaksi ratkaisua.

| $x^2 < 0$ | $x^2 = 0$ | $x^2 > 0$ |
|---|---|---|
| Yhtälön oikealla puolella on negatiivinen luku. $x^2 = -25$ | Yhtälön oikealla puolella on nolla. $x^2 = 0$ | Yhtälön oikealla puolella on positiivinen luku. $x^2 = 16$ |
| Minkään reaaliluvun toinen potenssi ei ole negatiivinen luku. ⇒ Yhtälöllä ei ole ratkaisuja. | Vain luvun nolla toinen potenssi on nolla. ⇒ Yhtälön ainoa ratkaisu on nolla. | Yhtälön toteuttaa kaksi reaalilukua, jotka ovat toistensa vastalukuja. ⇒ Yhtälöllä on kaksi ratkaisua. |

**ESIMERKKI 5**

Ratkaise yhtälö.

**a)** $2x^2 = 18$ **b)** $3x^2 + 6 = 0$ **c)** $4x^2 - 20 = 0$

**RATKAISU**

**a)** Jaetaan ensin yhtälön molemmat puolet toisen asteen termin kertoimella.

1. Siirrä vakiotermi yhtälön oikealle puolelle.
2. Jaa yhtälö puolittain toisen asteen termin kertoimella.
3. Ratkaise yhtälö neliöjuuren avulla.

$$2x^2 = 18 \quad \big| : 2$$
$$x^2 = 9$$
$$x = \sqrt{9} = 3 \quad \text{tai} \quad x = -\sqrt{9} = -3$$

**b)** Siirretään vakiotermi yhtälön oikealle puolelle ja jaetaan molemmat puolet toisen asteen termin kertoimella.

$$3x^2 + 6 = 0$$
$$3x^2 = -6 \quad \big| : 3$$
$$x^2 = -2$$

Reaaliluvun neliö ei voi olla negatiivinen, joten yhtälöllä ei ole ratkaisua.

**c)** Siirretään vakiotermi yhtälön oikealle puolelle ja jaetaan molemmat puolet toisen asteen termin kertoimella.

$$4x^2 - 20 = 0$$
$$4x^2 = 20 \quad \big| : 4$$
$$x^2 = 5$$
$$x = \pm\sqrt{5}$$

Neliöjuuren arvoa ei voida laskea ilman laskinta, joten vastaus jää lausekkeen muotoon.

**VASTAUS** **a)** $x = \pm 3$ **b)** ei ratkaisua **c)** $x = \pm\sqrt{5}$

# Tehtävät

## Ratkaisukaava

Ratkaise tehtävien 93–103 yhtälöt.

E1

**93.** a) $x^2 - 2x - 8 = 0$ b) $3x^2 + 2x - 1 = 0$

**94.** a) $x^2 - 3x + 2 = 0$ b) $-6x^2 + x + 2 = 0$

E2

**95.** a) $x^2 = 6x$ b) $x^2 + 1 = 2x$

**96.** a) $x^2 - 9 = 0$ b) $2x^2 = 50$

**97.** a) $x^2 - 6x + 9 = 0$ b) $4(x^2 + 2x + 1) = 0$

E3

**98.** a) $-10x^2 + 15x - 25 = 0$ b) $\frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{1}{2} = 0$

**99.** a) $2x^2 - 6x - 20 = 0$ b) $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - 1 = 0$

**100.** a) $-24x + 18 = -6x^2$ b) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = 0$

**101.** a) $-s^2 + 2s = -3$ b) $2t(3 - t) = 0$

**102.** a) $8x^2 - 3x = 2x^2 + x$ b) $100x^2 - 300x + 700 = 0$

**103.** a) $(x + 1)^2 = 4$ b) $y^2 - y + \frac{1}{4} = 0$

**104.** Määritä lausekkeen $(x + 1)(2 - x) - 2$ nollakohdat. [S2014, 3a]

**105.** Millä muuttujan $x$ arvolla lausekkeet $-x^2 - 8x - 2$ ja $2(x^2 - 3x - 5)$ saavat saman arvon?

**106.** Määritä vakio $t$ siten, että yhtälöllä $-4tx^2 - 10t^2x + 48 = 0$ on yhtenä ratkaisuna $x = 3$.

**107.** Määritä vakio $a$ siten, että toisen asteen yhtälöllä $6at^2 - a^2t - 1 = 0$ on toisena ratkaisuna $t = \frac{1}{2}$. Mikä on toinen ratkaisu?

**108.** Kahden peräkkäisen kokonaisluvun tulo on 2070. Mitkä ovat nämä luvut?

**109.** Määritä kaksi peräkkäistä, paritonta lukua, joiden tulo on 675.

### Vaillinainen toisen asteen yhtälö

Ratkaise tehtävien 110–117 yhtälöt.

E4

**110.** **a)** $(3x+1)(5-x)=0$ **b)** $7x^2-x=0$ **c)** $-3x=9x^2$

**111.** **a)** $x(x-4)=0$ **b)** $-(x+2)(x-4)=0$

**112.** **a)** $4x^2-x=0$ **b)** $-x+2x^2=0$

**113.** **a)** $\frac{1}{4}x=2x^2$ **b)** $6x^2+4x=3x^2-x$

**114.** **a)** $(x-\pi)(x+\sqrt{2})=0$ **b)** $(2x-1)^2=0$

E5

**115.** **a)** $3x^2=75$ **b)** $9x^2+18=0$ **c)** $5x^2-10=0$

**116.** **a)** $\frac{1}{3}t^2-6=0$ **b)** $5(x^2-1)=5$

**117.** **a)** $-x^2+7=2x^2$ **b)** $5x^2+30=2x^2$

**118.** Millä muuttujan $p$ arvolla lauseke $3p^2-5$ saa arvon
**a)** $-2$ **b)** $4$?

**119.** Millä muuttujan $x$ arvolla lausekkeet $2x^2-3$ ja $-(5x+3)$ saavat saman arvon?

**120.** Määritä vakio $a$ siten, että toisen asteen yhtälöllä $(a^2x-10a)^2=0$ ainoa ratkaisu on $x=5$.

## Sekalaisia

**121.** Ratkaise yhtälö.

**a)** $-2x^2 + 3x + 2 = 0$ **b)** $x^2 + 8x + 16 = 0$

**c)** $-3x^2 + 5x - 4 = 0$

**122.** Ratkaise yhtälö.

**a)** $\frac{2}{3}x^2 + \frac{7}{6}x = \frac{1}{3}$ **b)** $20x^2 + 20x - 80 = 0$

**123.** Ratkaise yhtälö.

**a)** $5x^2 = 10x$ **b)** $(x + 2)(x - 2) = 0$

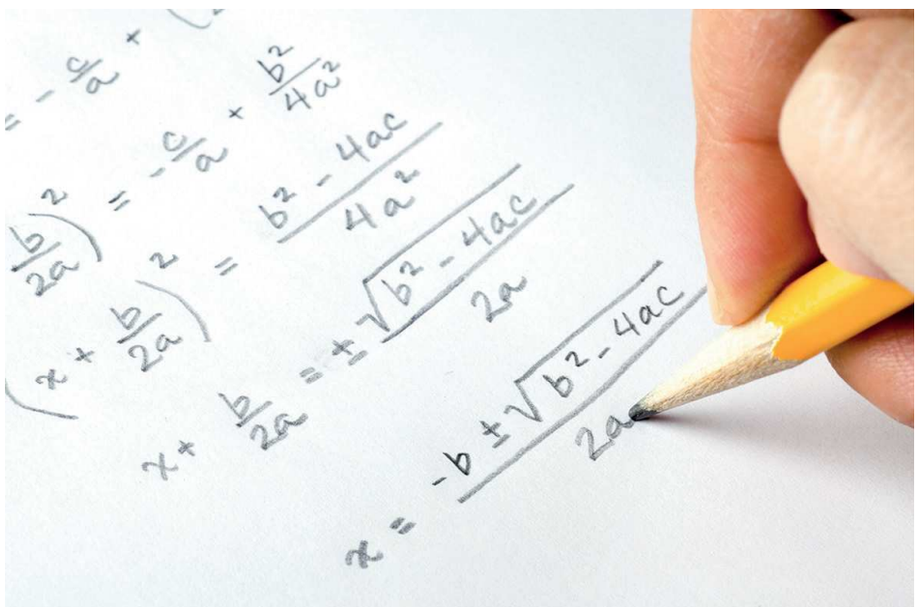
**124.** Määritä yhtälön $6x^2 - 7x + 2 = 0$ ne ratkaisut, jotka toteuttavat ehdon $0 < x < \frac{3}{5}$.

**125.** Ratkaise yhtälö.

**a)** $-3x = 9x^2$ **b)** $2(8x^2 - 3) = 3$ **c)** $\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{2}{3}$

**126.** Millä vakion $p$ arvolla yhtälön $x(x + p) = 3$ yhtenä ratkaisuna on luku $-3$, ja mikä on tällöin yhtälön toinen ratkaisu?

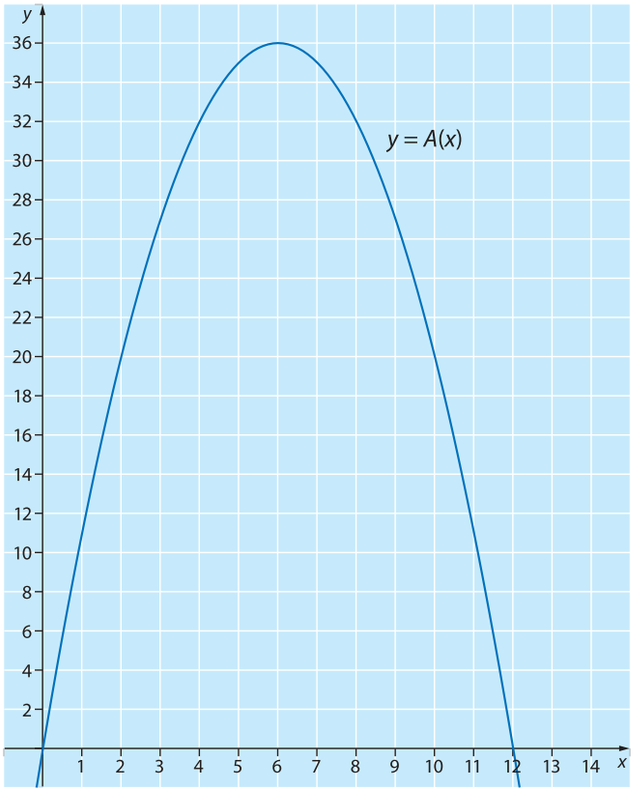
**127.** Suorakulmion kanta on 3,5 cm pidempi kuin korkeus. Laske sivujen pituudet, kun suorakulmion ala on 64 cm$^2$.



# 2.4 Toisen asteen polynomifunktio

**Pohdinta**

Suorakulmion piiri on 24 cm. Jos kannan pituus on $x$ cm, suorakulmion pinta-alaa voidaan mallintaa funktion $A(x)$ avulla.




Vastaa seuraaviin kysymyksiin funktion kuvaajan perusteella.

**a)** Mikä on suorakulmion pinta-ala, kun kannan pituus on 4,0 cm?

**b)** Suorakulmion pinta-ala on 20 cm$^2$. Kuinka pitkä on tämän suorakulmion kanta?

**c)** Määritä sellaisen suorakulmion mitat, jonka pinta-ala on 20 cm$^2$.

**d)** Mikä on suorakulmion suurin mahdollinen pinta-ala? Mitkä ovat tämän suorakulmion mitat?

**e)** Mitkä ovat funktion $A$ nollakohdat? Mitä nollakohdissa tapahtuu suorakulmion pinta-alalle?

**f)** Pinta-ala voi saada vain positiivisia arvoja. Millaisia arvoja muuttuja $x$ voi saada?

## Toisen asteen polynomifunktion kuvaaja

Toisen asteen polynomifunktio on muotoa $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
Toisen asteen polynomifunktioita ovat esimerkiksi:

$$f(x) = -4x^2 + 8x \qquad g(x) = 2x^2 - 4x + 2 \qquad p(x) = x^2 + 1$$

Piirretään funktion $f(x) = -4x^2 + 8x$ kuvaaja.

Leikkauspisteiden laskeminen helpottaa esim. akselien asteikkojen valinnassa.

**1** Lasketaan funktion kuvaajan ja koordinaattiakselien leikkauspisteet.

- $y$-akselilla olevien pisteiden $x$-koordinaatti on 0. Leikkauspisteen $y$-koordinaatti saadaan laskemalla funktion arvo, kun $x = 0$.

$$f(0) = -4 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0 = 0$$

Funktion kuvaaja leikkaa $y$-akselin pisteessä (0, 0).

- $x$-akselin leikkauskohdissa eli nollakohdissa funktion arvo on nolla. Leikkauspisteen $x$-koordinaatti saadaan ratkaisemalla yhtälö $f(x) = 0$.

$$-4x^2 + 8x = 0$$
$$x(-4x + 8) = 0$$

Yhtälö on vaillinainen toisen asteen yhtälö, joka voidaan ratkaista tulon nollasäännön avulla.

Tulon nollasäännön mukaan:

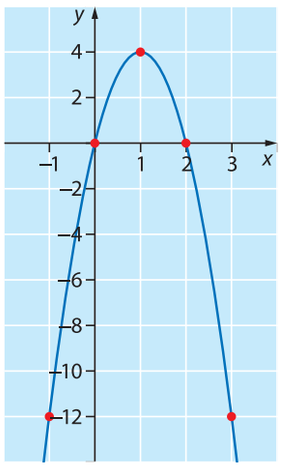
$$x = 0 \quad \text{tai} \quad -4x + 8 = 0$$
$$-4x = -8 \quad \big| : (-4)$$
$$x = 2$$

Funktion kuvaaja leikkaa $x$-akselin pisteissä (0, 0) ja (2, 0).

Vain ensimmäisen asteen polynomifunktion kuvaajan (suoran) piirtämiseen riittää kaksi pistettä.

**2** Lasketaan muutaman muun pisteen koordinaatit ja piirretään kuvaaja.

| $x$ | $f(x) = -4x^2 + 8x$ | Piste |
|---|---|---|
| $-1$ | $-4 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) = -12$ | $(-1, -12)$ |
| $1$ | $-4 \cdot 1^2 + 8 \cdot 1 = 4$ | $(1, 4)$ |
| $3$ | $-4 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 = -12$ | $(3, -12)$ |



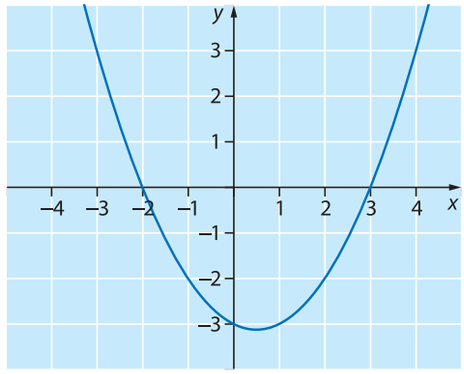
**ESIMERKKI 1**

Tutki toisen asteen polynomifunktion kuvaajaa ja vastaa kysymyksiin.

**a)** Mitkä ovat funktion nollakohdat?

**b)** Millä muuttujan $x$ arvoilla funktio saa arvon 3?

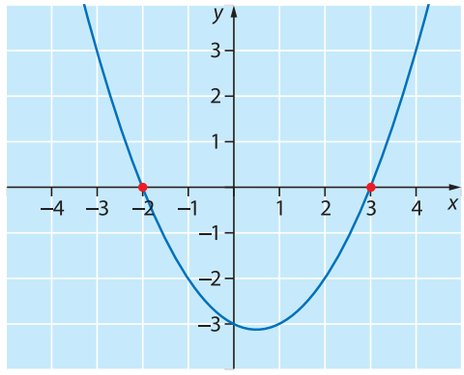
**c)** Millä muuttujan $x$ arvoilla funktio saa negatiivisia arvoja?




**RATKAISU**

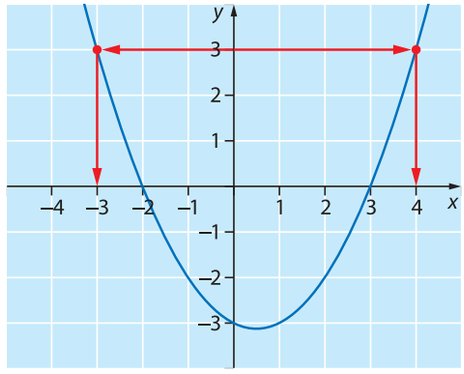
**a)** Funktion kuvaaja leikkaa $x$-akselin nollakohdissa.

Funktion nollakohdat ovat $x = -2$ ja $x = 3$.



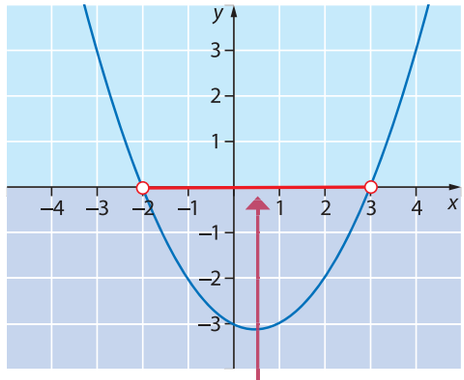

**b)** Funktion arvo on sama kuin kuvaajalla olevan pisteen $y$-koordinaatti. Luetaan funktion kuvaajalta, millä muuttujan $x$ arvoilla funktion arvo on 3.

Funktio saa arvon 3, kun $x = -3$ tai $x = 4$.




**c)** Funktion arvot ovat negatiivisia silloin, kun funktion kuvaaja kulkee $x$-akselin alapuolella.

Funktion arvot ovat negatiivisia, kun $-2 < x < 3$.




Ratkaisuna olevat luvut voidaan merkitä näkyviin koordinaattiakselille. Luvut $-2$ ja 3 eivät kuulu mukaan ratkaisujoukkoon.

**VASTAUS**

**a)** $x = -2$ ja $x = 3$

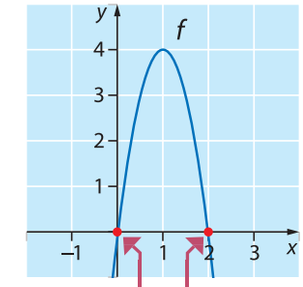
**b)** $x = -3$ tai $x = 4$

**c)** $-2 < x < 3$

Toisen asteen polynomifunktion kuvaajaa kutsutaan **paraabeliksi**.

Funktion $f(x) = -4x^2 + 8x$ kuvaaja on **alaspäin aukeava** paraabeli.

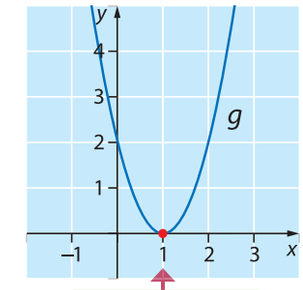
Funktion kuvaaja leikkaa $x$-akselin kahdessa kohdassa, joten funktiolla on kaksi nollakohtaa $x = 0$ ja $x = 2$.




nollakohdat $x = 0$ ja $x = 2$

Funktion $g(x) = 2x^2 - 4x + 2$ kuvaaja on **ylöspäin aukeava** paraabeli.

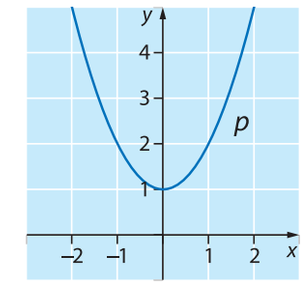
Funktion kuvaaja sivuaa $x$-akselia yhdessä kohdassa, joten funktiolla on yksi nollakohta $x = 1$.




nollakohta $x = 1$

Funktion $p(x) = x^2 + 1$ kuvaaja on **ylöspäin aukeava** paraabeli.

Funktion kuvaaja ei leikkaa $x$-akselia, joten funktiolla ei ole nollakohtia.

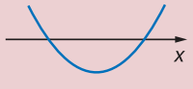



Paraabelin aukeamissuunta riippuu toisen asteen termin kertoimesta.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

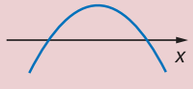
**$a > 0$**

Paraabeli on ylöspäin aukeava.




**$a < 0$**

Paraabeli on alaspäin aukeava.



**ESIMERKKI 2**

Olkoon $f(x) = 4 - x^2$.

**a)** Funktion kuvaaja on paraabeli. Mikä on paraabelin aukeamissuunta?

**b)** Laske funktion nollakohdat.

**c)** Missä pisteessä funktion kuvaaja leikkaa $y$-akselin?

**RATKAISU**

**a)** Toisen asteen termin kerroin on $-1$. Koska $-1 < 0$, paraabeli aukeaa alaspäin.

**b)** Funktion nollakohdat saadaan ratkaisemalla yhtälö $f(x) = 0$.

$$4 - x^2 = 0$$
$$-x^2 = -4 \quad | \cdot (-1)$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm\sqrt{4}$$
$$x = \pm 2$$

Yhtälö $4 - x^2 = 0$ on vaillinainen toisen asteen yhtälö, joka voidaan ratkaista ilman ratkaisukaavaa.

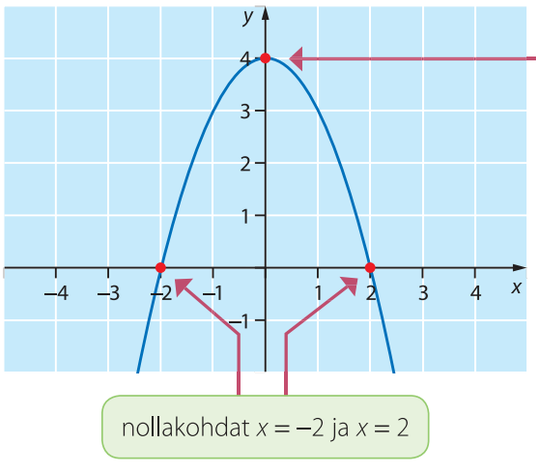
**c)** Kaikissa $y$-akselin pisteissä $x$-koordinaatti on 0. Lasketaan leikkauspisteen $y$-koordinaatti.

$$f(0) = 4 - 0^2 = 4$$

Funktion kuvaaja leikkaa $y$-akselin pisteessä $(0, 4)$.

**VASTAUS**

**a)** Paraabeli on alaspäin aukeava. **b)** $x = \pm 2$ **c)** $(0, 4)$

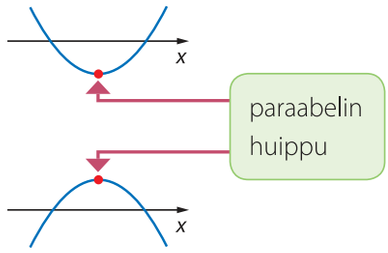



*y*-akselin leikkauspiste (0, 4)

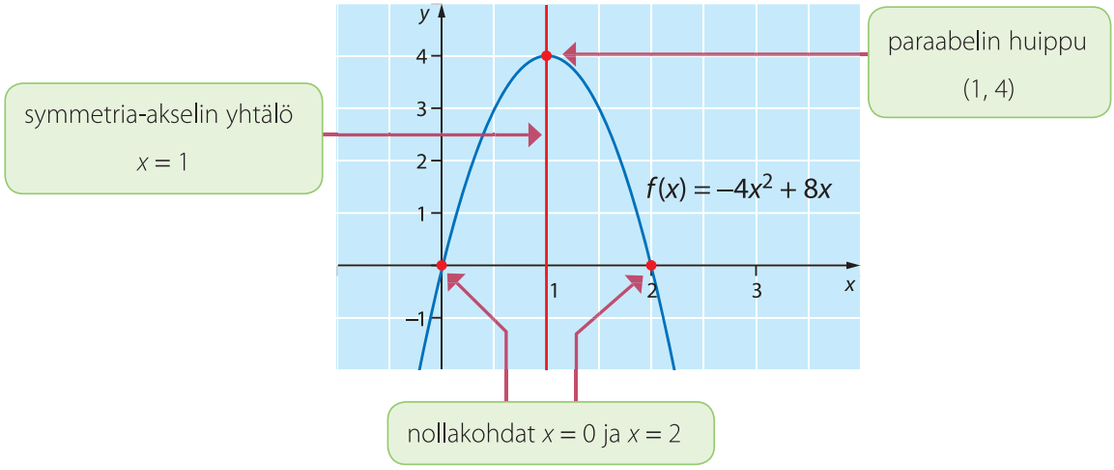
nollakohdat $x = -2$ ja $x = 2$

Paraabeli vaihtaa aina kulkusuuntaansa yhdessä pisteessä. Pistettä, jossa paraabelin kulkusuunta muuttuu, kutsutaan **huipuksi**.

- Jos paraabeli on ylöspäin aukeava, huippu sijaitsee kuvaajan matalimmassa kohdassa.
- Jos paraabeli on alaspäin aukeava, huippu sijaitsee kuvaajan korkeimmassa kohdassa.




Paraabeli on lisäksi aina symmetrinen huipun kautta kulkevan $y$-akselin suuntaisen suoran suhteen. Tätä suoraa kutsutaan paraabelin **symmetria-akseliksi**. $y$-akselin suuntaisen suoran yhtälössä $x$-koordinaatti pysyy aina vakiona, joten symmetria-akselin yhtälö saadaan selville huipun $x$-koordinaatin avulla.




Symmetriasta johtuen paraabelin huipun $x$-koordinaatti on nollakohtien puolivälissä. Huipun $x$-koordinaatti $x_h$ voidaan siten laskea nollakohtien keskiarvona.

Esimerkiksi kuvan funktion $f(x) = -4x^2 + 8x$ huipun $x$-koordinaatti on

$$x_h = \frac{0+2}{2} = 1.$$

**ESIMERKKI 3**

Olkoon $f(x) = x^2 - 2x - 8$.

**a)** Laske paraabelin huipun koordinaatit.

**b)** Mikä on paraabelin symmetria-akselin yhtälö?

**RATKAISU**

**a)** Paraabelin huipun $x$-koordinaatti on nollakohtien keskiarvo. Ratkaistaan siis ensin funktion nollakohdat.

$$f(x) = 0$$

$a = 1,\ b = -2,\ c = -8$ →

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ →

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2}$$

$$x = \frac{2 \pm 6}{2}$$

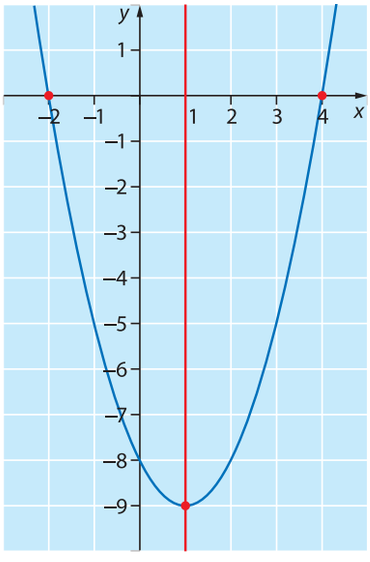
$$x = \frac{2+6}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{tai} \quad x = \frac{2-6}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Paraabelin huipun $x$-koordinaatti on $x_h = \dfrac{4 + (-2)}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$.

Huipun $y$-koordinaatti on sama kuin funktion arvo kohdassa $x = 1$.

$$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 8 = 1 - 2 - 8 = -9$$

Paraabelin huipun koordinaatit ovat $(1, -9)$.




**b)** Symmetria-akseli kulkee aina huipun kautta. Koska symmetria-akseli on $y$-akselin suuntainen suora, sen yhtälö on $x = 1$.

**VASTAUS**

**a)** Huipun koordinaatit ovat $(1, -9)$.

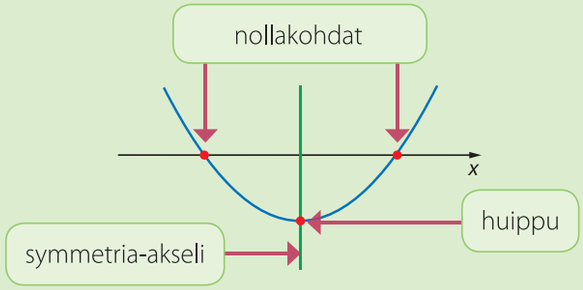
**b)** Symmetria-akselin yhtälö on $x = 1$.

## Toisen asteen polynomifunktio

Toisen asteen polynomifunktio on muotoa
$f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

- Funktion kuvaaja on paraabeli, joka aukeaa
  – ylöspäin, kun $a > 0$
  – alaspäin, kun $a < 0$.

- Funktiolla voi olla korkeintaan 2 nollakohtaa.
  Nollakohdat saadaan ratkaisemalla yhtälö $f(x) = 0$.




- Funktion huippu sijaitsee nollakohtien puolivälissä.

- Kuvaaja on symmetrinen huipun kautta kulkevan $y$-akselin suuntaisen suoran suhteen. Suoraa kutsutaan symmetria-akseliksi.

Useista laskimista löytyy valmis toiminto symmetria-akselin määrittämiseksi.

Huipun koordinaattien täsmällisempi määrittäminen käsitellään syventävällä kurssilla MAB 7 Matemaattinen analyysi.

Jos paraabelilla ei ole nollakohtia, huipun koordinaatit määritetään kuvaajan avulla. Laskimella piirretystä funktion kuvaajasta tulee saada näkyviin paraabelin huippu. Tämä useimmiten vaatii joko kuvaajanäkymän pienentämistä tai koordinaatiston asteikkojen muuttamista.

Toisen asteen polynomifunktion arvo huippukohdassa on aina joko funktion kaikkein suurin tai kaikkein pienin arvo, riippuen siitä, mihin suuntaan kuvaajaparaabeli aukeaa. Tästä syystä huippuja voidaan kutsua myös joko maksimipisteiksi tai minimipisteiksi. Tämä nimitys esiintyy yleensä laskinohjelmien niissä toiminnoissa, joiden avulla paraabelin huipun koordinaatteja voidaan etsiä.

## Toisen asteen polynomifunktio matemaattisena mallina

**ESIMERKKI 4**

Elias heittää pallon Nealle. Kun heitosta on kulunut $t$ sekuntia, pallon korkeutta (m) maanpinnasta kuvaa funktio $h(t) = -1{,}7t^2 + 4{,}6t + 1{,}8$.

**a)** Kuinka korkealla pallo on 2 sekunnin kuluttua heittohetkestä?

**b)** Nea ei saa palloa kiinni. Kuinka pitkän ajan kuluttua pallo osuu maahan?

**c)** Kuinka pitkän ajanjakson pallon korkeus maanpinnasta on vähintään 3,5 m?

**RATKAISU**

**a)** Pallon korkeus 2 sekunnin kuluttua saadaan laskemalla funktion arvo, kun $t = 2$.

$$h(2) = -1{,}7 \cdot 2^2 + 4{,}6 \cdot 2 + 1{,}8 = 4{,}2 \text{ (m)}$$

**b)** Pallo osuus maahan, kun pallon korkeus on 0.

$$h(t) = 0$$

$$-1{,}7t^2 + 4{,}6t + 1{,}8 = 0$$

$$t = -0{,}346\ldots \quad \text{tai} \quad t = 3{,}05\ldots$$

Pyöristä lopuksi vastaus sopivalle tarkkuudelle. →

Aika ei voi olla negatiivinen, joten $t = 3{,}05\ldots$ s $\approx 3{,}1$ s.

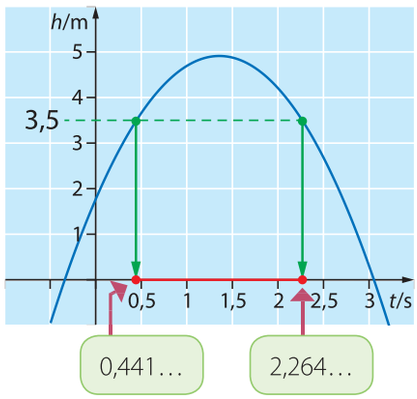
Koska heittohetkellä $t = 0$, pallo osuu maahan 3,1 sekunnin kuluttua heittohetkestä.

**c)** Funktio $h(t)$ kuvaa pallon korkeutta maanpinnasta. Pallon korkeus on vähintään 3,5 m, kun $h(t) \geq 3{,}5$.

Kopioi laskimesta tarkat arvot ja pyöristä vastaus vasta lopuksi. →

$$-1{,}7t^2 + 4{,}6t + 1{,}8 \geq 3{,}5$$

$$0{,}441\ldots \leq t \leq 2{,}264\ldots$$




Kun aika on välillä [0,441… s; 2,264… s] pallon korkeus on vähintään 3,5 m. Lasketaan tämän ajanjakson pituus.

$$2{,}264\ldots \text{ s} - 0{,}441\ldots \text{ s} = 1{,}822\ldots \text{ s} \approx 1{,}8 \text{ s}$$

**VASTAUS**

**a)** 4,2 m **b)** 3,1 sekunnin kuluttua

**d)** 1,8 sekunnin ajan

**ESIMERKKI 5**

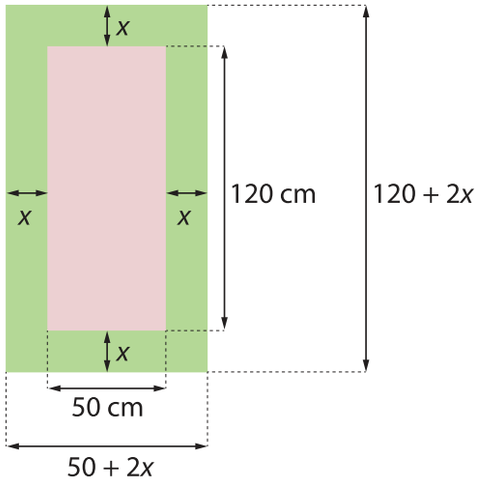
Suorakulmion muotoinen peili on kehystetty kehyksellä, jonka leveys on $x$ cm. Peilin mitat ilman kehyksiä ovat 50 cm × 120 cm.

**a)** Muodosta ja sievennä funktio $A$, joka kuvaa kehystetyn peilin pinta-alaa muuttujan $x$ funktiona.

**b)** Peili vie kehyksineen seinältä tilaa 9400 cm$^2$.
Kuinka leveä kehys on?

**RATKAISU**

**a)** Kehyksen leveys on $x$ (cm). Hahmotellaan peilistä mallikuva ja merkitään siihen annetut mitat.




Kehystetyn peilin korkeus on siis $120 + 2x$ (cm) ja leveys $50 + 2x$ (cm). Pinta-ala saadaan leveyden ja korkeuden tulona.

Sievennä lauseke laskimella.

$$A(x) = (120 + 2x)(50 + 2x) = 4x^2 + 340x + 6000$$

**b)** Peili vie seinältä tilaa 9400 cm$^2$, joten $A(x) = 9400$.

$$4x^2 + 340x + 6000 = 9400$$

$$x = -94{,}0388\ldots \quad \text{tai} \quad x = 9{,}0388\ldots$$

Koska $x$ on kehyksen leveys, se on aina positiivinen luku ($x \geq 0$). Negatiivinen ratkaisu ei siis kelpaa, joten $x = 9{,}0388\ldots \approx 9{,}0$ (cm).

**VASTAUS**

**a)** $A(x) = 4x^2 + 340x + 6000$ **b)** Kehyksen leveys on 9,0 cm.

**ESIMERKKI 6**

Markkinoilla myydään muurinpohjalettuja. Letunmyyjä arvioi menekiksi 110 lettua, jos letun hinta on 3,50 €. Jokainen 0,10 €:n korotus hinnassa alentaa menekkiä 3 letulla.

**a)** Muodosta ja sievennä funktio $T(x)$, joka kuvaa myyntitulojen riippuvuutta 0,10 €:n hinnankorotusten lukumäärästä $x$.

**b)** Kuinka suuret ovat myyntitulot, jos letun hinta on 4,20 €?

**c)** Mihin hintaan lettuja tulisi myydä, jotta myyntitulot olisivat mahdollisimman suuret?

**RATKAISU**

**a)** Tutkitaan tilannetta taulukon avulla ja muodostetaan funktion lauseke.

| Hinnan korotusten määrä | Hinta (€) | Määrä (kpl) | Myyntitulo (€) |
|---|---|---|---|
| 0 | $3{,}50$ | $110$ | $3{,}50 \cdot 110$ |
| 1 | $3{,}50 + 0{,}10$ | $110 - 3$ | $(3{,}50 + 0{,}10)(110 - 3)$ |
| 2 | $3{,}50 + 2 \cdot 0{,}10$ | $110 - 2 \cdot 3$ | $(3{,}50 + 2 \cdot 0{,}10)(110 - 2 \cdot 3)$ |
| 3 | $3{,}50 + 3 \cdot 0{,}10$ | $110 - 3 \cdot 3$ | $(3{,}50 + 3 \cdot 0{,}10)(110 - 3 \cdot 3)$ |
| $x$ | $3{,}50 + x \cdot 0{,}10$ | $110 - x \cdot 3$ | $(3{,}50 + x \cdot 0{,}10)(110 - x \cdot 3)$ |

Myyntituloa kuvaava funktio on siis

Sievennä lauseke laskimella.

$$T(x) = (3{,}50 + 0{,}10x)(110 - 3x) = -0{,}3x^2 + 0{,}5x + 385.$$

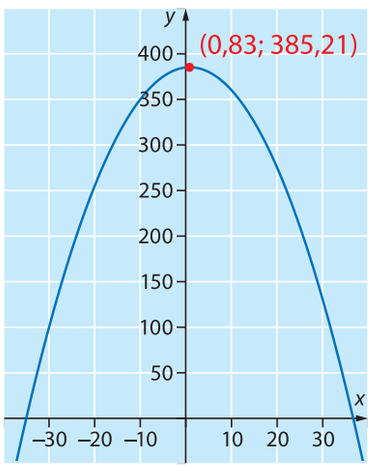
3,50 € + 7 · 0,10 € = 4,20 €

**b)** Jos letun hinta on 4,20 €, niin alkuperäiseen hintaan on tehty 7 kpl 0,10 €:n korotuksia Lasketaan myyntitulo, kun letun hinta on 4,20 €.

$$T(7) = -0{,}3 \cdot 7^2 + 0{,}5 \cdot 7 + 385 = 373{,}8 \text{ (€)}$$

**c)** Piirretään laskimella funktion kuvaaja. Myyntitulot saavat suurimman arvonsa paraabelin huipussa. Selvitetään laskimen avulla huipun koordinaatit.

Pienennä laskimen kuvaajanäkymää niin, että saat kuvaajan huipun näkyviin.




Huipun $x$-koordinaatti $x \approx 0{,}83$.

Muuttuja $x$ kuvaa 0,10 euron hinnankorotusten lukumäärää. Jotta myyntitulot olisivat mahdollisimman suuret, lettuja tulisi myydä hintaan

$$3{,}5 \text{ €} + 0{,}83 \cdot 0{,}1 = 3{,}583 \text{ €} \approx 3{,}58 \text{ €}.$$

**VASTAUS** **a)** $T(x) = -0{,}3x^2 + 0{,}5x + 385$ **b)** 373,80 € **c)** 3,58 €

## Laskimen tai muun apuvälineen käyttö

**Yhtälön ratkaiseminen**
Laskimista löytyy valmis toiminto yhtälöiden ratkaisemiseksi. Muista aina kirjoittaa tehtävän ratkaisuun vastauksen lisäksi se yhtälö, jonka olet laskimella ratkaissut.

**Funktio**
Funktion lauseke kannattaa tallentaa laskimen muistiin nimen ja muuttujakirjaimen avulla. Tällöin funktiomerkintää voidaan käyttää esimerkiksi funktion arvojen laskemiseen sekä yhtälöiden ja epäyhtälöiden ratkaisemiseen.

**Funktion kuvaaja**
Laskimilla voidaan piirtää funktion kuvaaja funktion lausekkeen avulla.

**Funktion kuvaajan tulkinta**
Laskimella piirretystä funktion kuvaajasta voidaan etsiä laskintoimintojen avulla esimerkiksi nollakohdat sekä tutkia funktion arvoja ja ratkaista yhtälöitä.

Funktion ja muuttujan arvojen tarkastelu onnistuu yleensä joko jäljitystoiminnon (trace) avulla tai sijoittamalla kuvaajalle pisteitä tarkasteltaviin kohtiin. Kuvajalle merkittyjen pisteiden koordinaatteja pystyy yleensä muuttamaan. Tällä keinolla voi etsiä funktion arvoja eri kohdissa tai ratkaista yhtälöitä kuvaajan avulla.

**Kuvaajanäkymän muuttaminen**
Usein funktion kuvaajaa piirrettäessä kuvaajanäkymää pitää joko suurentaa tai pienentää, jotta kuvaajasta saadaan näkyviin halutut kohdat. Laskimissa on toiminnot suurentamiselle ja pienentämiselle. Tämän lisäksi koordinaattiakselien asteikkoja voi muuttaa tarpeen mukaan.

# Tehtävät

## Toisen asteen polynomifunktion kuvaaja

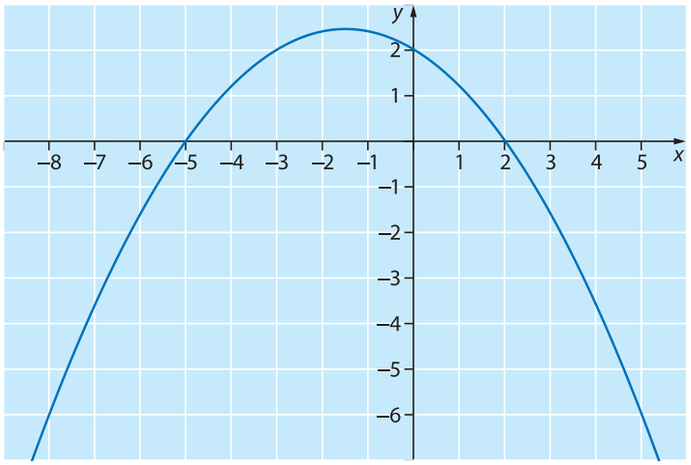
E1

**128.** Tutki toisen asteen polynomifunktion kuvaajaa ja vastaa kysymyksiin.

**a)** Mitkä ovat funktion nollakohdat?

**b)** Millä muuttujan $x$ arvoilla funktio saa arvon $-6$?

**c)** Millä muuttujan $x$ arvoilla funktio saa negatiivisia arvoja?




**129.** Viereen on piirretty erään toisen asteen polynomifunktion $f$ kuvaaja.

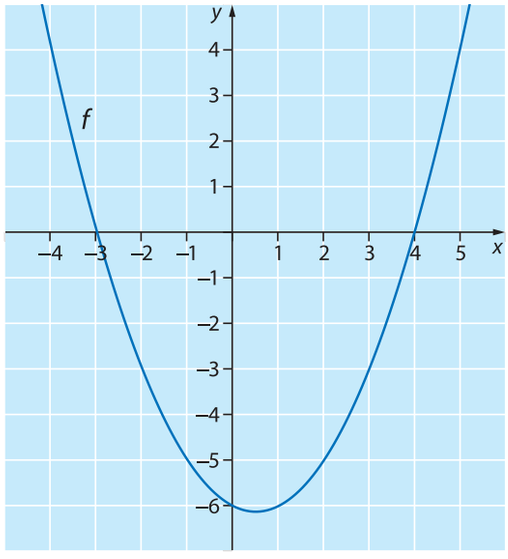
**a)** Missä pisteissä funktion kuvaaja leikkaa koordinaattiakselit?

**b)** Mikä on funktion arvo kohdassa $x = -2$?

**c)** Määritä kuvaajan avulla $f(3)$.

**d)** Ratkaise kuvaajan avulla yhtälö $f(x) = 4$.

**e)** Ratkaise kuvaajan avulla yhtälö $f(x) = -7$.




**130.** Tutki toisen asteen polynomifunktion $f$ kuvaajaa.

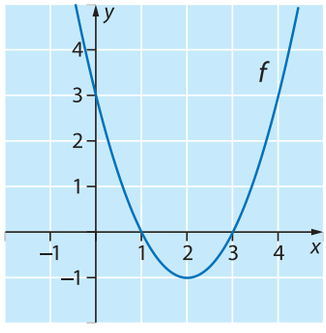
**a)** Määritä $f(4)$.

**b)** Määritä $f(1)$

**c)** Ratkaise $f(x) = 3$.

**d)** Ratkaise $f(x) = -1$.

**e)** Millä muuttujan $x$ arvoilla funktion arvot ovat negatiivisia?



**131.** Täydennä taulukko.

| Funktio | Paraabelin aukeamissuunta |
|---|---|
| $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ | |
| $g(x) = x^2 + 2x + 5$ | |
| $p(x) = 3 - 2x^2$ | |
| $h(x) = 9x^2 - 4$ | |

E2

**132.** Olkoon $f(x) = 2x^2 + x - 1$.

**a)** Mihin suuntaan funktion kuvaajana oleva paraabeli aukeaa?

**b)** Laske funktion nollakohdat.

**c)** Missä pisteessä funktion kuvaaja leikkaa $y$-akselin?

**133.** Olkoon $f(x) = 9 - x^2$.

**a)** Mikä on funktion kuvaajaparaabelin aukeamissuunta?

**b)** Laske funktion ja koordinaattiakselien leikkauspisteet.

**c)** Piirrä funktion kuvaaja.

Paraabelin hahmottelemiseksi riittää kuvaaja, jossa näkyy

- $x$-akseli
- paraabelin aukeamissuunta
- nollakohdat.

**134.** Piirrä funktion $f(x) = x^2 + 2x - 8$ kuvaaja.

**135.** Laske funktion nollakohdat ja hahmottele funktion kuvaaja.

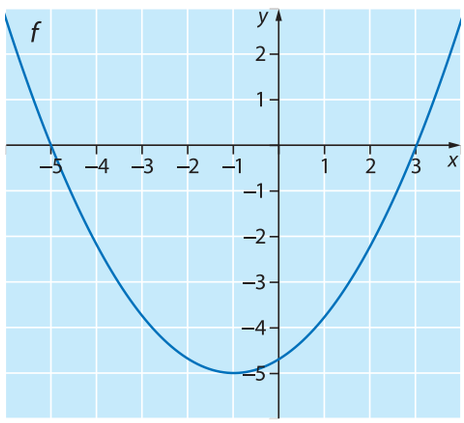
**a)** $f(x) = 2x^2 + 2$ **b)** $f(x) = -x^2 - 4x - 4$ **c)** $f(x) = 4x - x^2$

**136.** Funktio $f$ on toisen asteen polynomifunktio. Määritä kuvaajan avulla paraabelin

**a)** ja $x$-akselin leikkauspisteet

**b)** huipun koordinaatit

**c)** symmetria-akselin yhtälö.




E3

**137.** Olkoon $f(x) = -x^2 + 8x - 15$.

**a)** Laske paraabelin huipun koordinaatit.

**b)** Mikä on paraabelin symmetria-akselin yhtälö?

**138.** Olkoon $f(x) = 3x^2 - 12$.

**a)** Mihin suuntaan funktion kuvaajaparaabeli aukeaa?

**b)** Laske funktion kuvaajan ja koordinaattiakselien leikkauspisteiden koordinaatit.

**c)** Laske paraabelin huipun koordinaatit.

**d)** Määritä symmetria-akselin yhtälö.

**139.** Määritä funktion $f(x) = -4x^2 + 8x - 3$ nollakohdat ja kuvaajaparaabelin huipun koordinaatit.

**140.** Määritä paraabelin huipun koordinaatit. Onko huippu maksimipiste vai minimipiste?

**a)** $f(x) = 6x - 3x^2$ **b)** $f(x) = 10x^2 + 40x + 30$

**141.** Toisen asteen polynomifunktion kuvaajan symmetria-akseli on $x = 2$. Funktion toinen nollakohta on $x = -8$. Mikä on funktion toinen nollakohta?

---

**142.** Piirrä funktion $f(x) = -0{,}5x^2 - x + 12$ kuvaaja ja ratkaise tehtävä kuvaajan avulla.

**a)** Missä pisteessä funktion kuvaaja leikkaa $y$-akselin?

**b)** Mitkä ovat funktion nollakohdat?

**c)** Mikä on funktion arvo, kun $x = 3$?

**d)** Millä muuttujan $x$ arvoilla funktio saa arvon 10? Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.

Laskimista löytyy yleensä jäljitystoiminto (trace), jonka avulla funktion kuvaajaa voi tutkia piste kerrallaan. Etsi laskimestasi tämä toiminto.

**143.** Piirrä funktion $f(x) = -6x^2 + 17x + 5$ kuvaaja ja ratkaise tehtävä kuvaajan avulla. Anna likiarvovastaukset yhden desimaalin tarkkuudella.

**a)** Määritä $f(0)$ ja $f(-10)$.

**b)** Ratkaise yhtälö $f(x) = 0$.

**c)** Ratkaise yhtälö $f(x) = -20$.

**144.** Määritä kuvaajan avulla funktion $f(x) = 2x^2 - 5x + 14$ huipun koordinaatit. Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella. Onko huippu maksimipiste vai minimipiste?

**145.** Piirrä funktion $f(x) = 3x^2 - 10x + 8$ kuvaaja ja ratkaise tehtävä kuvaajan avulla.

**a)** Mikä on funktion arvo kohdassa $x = 3$?

**b)** Onko piste $(6, -122)$ funktion kuvaajalla?

**c)** Määritä paraabelin huippu. Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.

E4

**146.** Sanni harrastaa puutarhanhoitoa. Hän rakentaa köynnöskasvia varten kaarielementin puutarhassa olevan tekolammen yli. Kaaren korkeutta (m) lammen pinnasta kuvaa funktio $f(x) = -0{,}275x^2 + 1{,}65x$, missä $x$ on etäisyys metreinä kaaren lähtöpisteestä maanpintaa pitkin. Kaari asetetaan lammen reunalta suoraan vastakkaiselle reunalle.

**a)** Kaaren korkein kohta sijaitsee 2 m:n etäisyydellä lähtöpisteestä (maanpintaa pitkin mitattuna). Kuinka korkealle lammen pinnasta kaarielementti ulottuu tässä kohdassa?

**b)** Kuinka leveä lampi on kaarielementin kohdalta?

**147.** Vapaassa pudotuksessa pudottu matka $s$ metreinä on ajan funktio $s(t) = 4{,}905t^2$, jossa $t$ on putoamisesta kulunut aika sekunteina.

**a)** Kuinka pitkän matkan kappale putoaa 4,0 ensimmäisen sekunnin aikana?

**b)** Kappale pudotetaan 1200 metrin korkeudesta. Kuinka kauan matka maahan kestää?

**148.** Laboratoriossa tehdyn tutkimuksen mukaan nestemäisen veden tiheys (mg/cm$^3$) riippuu veden lämpötilasta (°C) funktion $R(x) = -0{,}00447x^2 + 0{,}0443x + 999{,}17$ mukaan.

**a)** Mikä on veden tiheys, kun lämpötila on 85 °C?

**b)** Mikä on kiehumispisteessä olevan veden tiheys?

**c)** Missä lämpötilassa nestemäisen veden tiheys on 990 mg/cm$^3$? Anna vastaus yhden desimaalin tarkkuudella.

**d)** Missä lämpötilassa mallin mukaan veden tiheys on suurimmillaan? Anna vastaus kokonaisina asteina.

**149.** **a)** Muodosta ja sievennä funktio, joka kuvaa kahden peräkkäisen kolmella jaollisen kokonaisluvun tuloa.

**b)** Minkä kahden peräkkäisen kolmella jaollisen kokonaisluvun tulo on 2754?

**150.** Vähittäiskauppa myy kotimaista varhaisperunaa hintaan $x$ €/kg. Kasvihuoneissa kasvatetun varhaisperunan myyntimäärä keväällä myynnin ensimmäisinä päivinä riippuu perunan kilohinnasta lausekkeen $28{,}7 - 0{,}69x$ (kg) mukaisesti.

**a)** Muodosta ja sievennä funktio $M$, joka kuvaa varhaisperunan myynnistä saatavan myyntitulon määrää kilohinnan $x$ (€/kg) funktiona.

**b)** Mikä on perunan kilohinnan oltava, jotta myyntitulo olisi 278,00 €? Varhaisperunan kilohinta on minimissään 20,00 €/kg.

E5

**151.** Kioskin seinässä on hinnasto, joka on kirjoitettu suorakulmion muotoiselle liitutaululle. Liitutaulun mitat ovat 130 cm × 100 cm. Liitutaulu on kehystetty tasalevyisellä valkoisella kehyksellä, jonka leveys on $x$ cm.

**a)** Muodosta ja sievennä funktio $A$, joka kuvaa kehystetyn liitutaulun pinta-alaa muuttujan $x$ funktiona.

**b)** Pelkän kehyksen pinta-ala on 2500 $cm^2$. Kuinka leveä kehys on?

**152.** Suorakulmion muotoisen hiekkalaatikon ympärysmitta on 11 m. Merkitään hiekkalaatikon toisen sivun pituutta kirjaimella $x$.

**a)** Muodosta lauseke, joka kuvaa toisen sivun pituutta.

**b)** Muodosta ja sievennä funktio $A$, joka kuvaa hiekkalaatikon pinta-alaa sivunpituuden $x$ funktiona.

**c)** Laske hiekkalaatikon pinta-ala, kun $x = 2{,}5$ m.

**d)** Mitkä ovat hiekkalaatikon mitat, kun sen pinta-ala on 6,5 $m^2$?

**153.** Markus valmistaa suorakulmaisen kolmion muotoisen viirin. Kolmion kateeteista toinen on 1,8 metriä pidempi kuin toinen.

**a)** Muodosta ja sievennä funktio $f$, joka kuvaa viirin pinta-alan riippuvuutta lyhyemmän kateetin pituudesta $x$.

**b)** Laske viirin pinta-ala, kun lyhyemmän sivun pituus on 60 cm.

**c)** Kuinka pitkät ovat kolmion kateetit, kun viirin pinta-ala on 0,50 $m^2$?

E6

**154.** Elokuvateatterissa kävijöiden määrä riippuu lipun hinnasta. Kun lippu maksaa 10,00 €, elokuvateatterissa käy 3800 henkilöä viikossa. Jos lipun hintaa nostetaan 0,50 €, kävijöiden määrä vähenee 100 henkilöllä viikossa.

**a)** Muodosta ja sievennä myyntituloja kuvaava funktio $T$, kun $x$ on 0,50 €:n hinnanmuutosten lukumäärä.

**b)** Kuinka suuret ovat myyntitulot, jos lipun hinta on 12,00 €?

**c)** Mikä tulisi elokuvalipun hinnan olla, jotta myyntitulot olisivat mahdollisimman suuret?

**155.** T-paitoja myyvä verkkokauppa myy päivässä 90 paitaa, jos paidan hinta on 14 €. Yhden euron korotus paidan hinnassa laskee myyntiä viidellä paidalla. Paidan kustannukset yritykselle on 4,50 €/kpl.

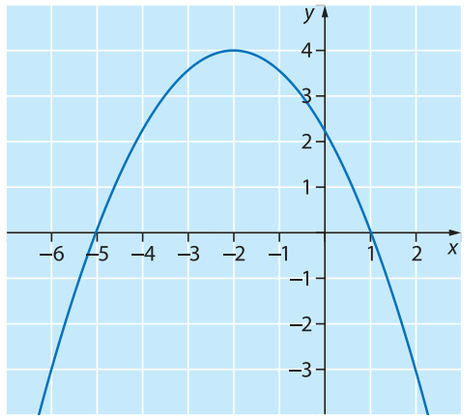
**a)** Muodosta ja sievennä funktio $f$, joka kuvaa verkkokaupan t-paitojen myynnistä saamaa voittoa, kun hinta muuttuu $x$ euroa.

**b)** Kuinka suuri myyntihinta paidalle on asetettava, jotta yrityksen voitto olisi 350 € päivässä.? Yhden paidan hinnan pitää olla vähintään 10 €.

**c)** Millä välillä myyntihinta voi vaihdella, jos voiton halutaan olevan vähintään 400 €? Yhden paidan hinnan pitää olla vähintään 10 €.

## Sekalaisia

**156.** Tutki toisen asteen polynomifunktion $f$ kuvaajaa.




**a)** Mitkä ovat funktion nollakohdat?
**b)** Määritä kuvaajan avulla $f(2)$.
**c)** Ratkaise kuvaajan avulla yhtälö $f(x) = -3$.
**d)** Ratkaise kuvaajan avulla yhtälö $f(x) = 5$.
**e)** Millä muuttujan $x$ arvoilla funktion arvot ovat positiivisia?
**f)** Määritä kuvaajaparaabelin huipun koordinaatit.
**g)** Mikä on symmetria-akselin yhtälö?

Paraabelin hahmottelemiseksi riittää kuvaaja, jossa näkyy
- $x$-akseli
- paraabelin aukeamissuunta
- nollakohdat.

**157.** Olkoon $f(x) = 4x^2 - 2x$.
**a)** Mihin suuntaan funktion kuvaajaparaabeli aukeaa?
**b)** Laske funktion ja koordinaattiakselien leikkauspisteet.
**c)** Hahmottele funktion kuvaaja.

**158.** Olkoon $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Määritä funktion
**a)** nollakohdat **b)** huippu **c)** symmetria-akseli.

**159.** Jäätelökioskin myyntitulot vuorokaudessa riippuvat jäätelön myyntihinnasta $x$ € funktion $f(x) = 414x - 88x^2$ mukaisesti. Jäätelön myyntihinnan tulee olla välillä 1,00 € – 4,00 €.
**a)** Kuinka suuret ovat jäätelökioskin myyntitulot, kun jäätelön hinta on 2,50 €?
**b)** Mihin hintaan jäätelöitä tulisi myydä, jotta myyntitulot yhden vuorokauden aikana olisivat 300 €?
**c)** Mikä pitäisi jäätelön myyntihinnan olla, jotta myyntitulot olisivat mahdollisimman suuret? Kuinka suuret ovat myyntitulot tällöin?

**160.** Marjayhtiöllä on 100 hillanpoimijaa.
**a)** Hyvällä säällä hilloja poimitaan päivässä $132 - 6x$ (kg) hintaan $x$ €/kg. Muodosta ja sievennä funktio $f$, joka kuvaa yhden poimijan saamia poimintatuloja.
**b)** Mikä on poimijalle maksettava kilohinta, kun hänen poimintatulonsa ovat 310 €? Kilohinnan pitää olla minimissään 10 €.
**c)** Yksi poimija kerää hilloja keskimäärin 14 kg vuorokaudessa. Jokainen ylimääräinen poimija vähentää keskimääräistä saalista 0,2 kg. Muodosta ja sievennä funktio $g$, joka kuvaa päivän aikana kerättyä marjamäärää, kun yhtiö palkkasi $y$ ylimääräistä poimijaa. Kuinka paljon hilloja keräsi 112 poimijaa?

# 3 Yhtälöpari

## Tavoitteena on

- kerrata ja täydentää yhtälöparin ratkaisumenetelmiä
- oppia käyttämään yhtälöpareja funktioiden leikkauspisteiden laskemisessa
- oppia käyttämään yhtälöpareja sanallisissa sovellustehtävissä.

- Miten yhtälöpari ratkaistaan graafisesti eli kuvaajan avulla?
- Miten yhtälöpari ratkaistaan algebrallisesti eli laskemalla?
  - sijoitusmenetelmä
  - yhteenlaskumenetelmä
- Miten yhtälöpari muodostetaan, kun ratkaistaan kahden funktion leikkauspiste?
  - kaksi ensimmäisen asteen funktiota
  - ensimmäisen asteen funktio ja toisen asteen funktio
  - kaksi toisen asteen funktiota
- Miten yhtälöpari muodostetaan sanallisissa tehtävissä?

- Miten yhtälöpari ratkaistaan graafisesti eli kuvaajan avulla?
  - kuvaajien piirtäminen samaan koordinaatistoon
  - leikkauspisteen etsiminen kuvaajien avulla
- Miten yhtälöpari ratkaistaan algebrallisesti eli laskemalla?
- Miten yhtälöpari muodostetaan sanallisissa tehtävissä?

# 3.1 Yhtälöpari ja leikkauspisteet

**Pohdinta**

Koordinaatistoon on piirretty ensimmäisen asteen polynomifunktioiden $f$ ja $g$ kuvaajat.

**a)** Piste $A$ on funktion $f$ kuvaajalla. Pisteen $x$-koordinaatti on 3. Mikä on pisteen $y$-koordinaatti?

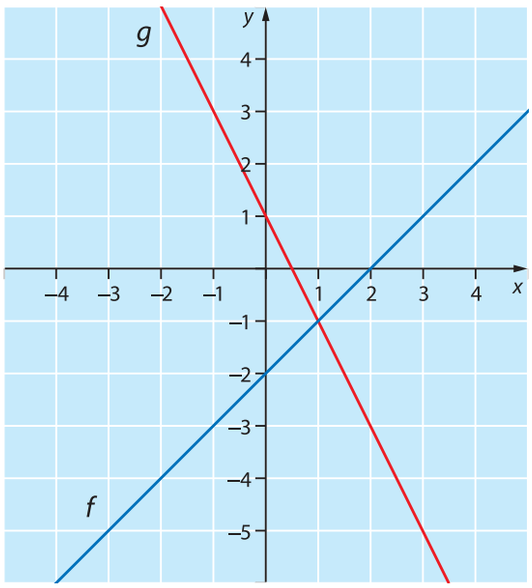
**b)** Piste $B$ on funktion $g$ kuvaajalla. Pisteen $y$-koordinaatti on 3. Mikä on pisteen $x$-koordinaatti?

**c)** Onko piste $C(4, 2)$ funktion $f$ kuvaajalla?

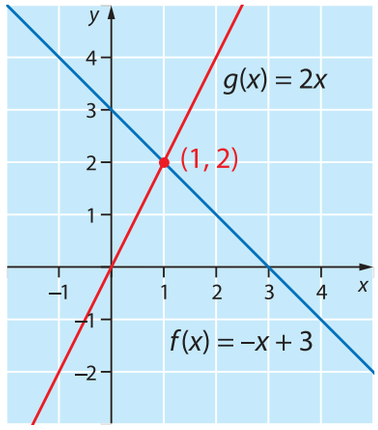
**d)** Onko piste $D(-1, -2)$ funktion $g$ kuvaajalla?

**e)** Piste $E$ on funktioiden yhteinen piste. Miten yhteinen piste näkyy alla olevissa kuvaajissa? Määritä pisteen $E$ koordinaatit.

**f)** Funktioiden lausekkeet ovat: $f(x) = x - 2$ ja $g(x) = -2x + 1$. Miten selvittäisit yhteisen pisteen koordinaatit laskemalla käyttämättä apuna funktioiden kuvaajia?



Tarkastellaan ensimmäisen asteen polynomifunktioita $f(x) = -x + 3$ ja $g(x) = 2x$. Piirretään funktioiden kuvaajat samaan koordinaatistoon.




Koska funktiot ovat ensimmäisen asteen polynomifunktioita, niiden kuvaajat ovat suoria. Koska funktion arvot kertovat kuvaajalla olevien pisteiden $y$-koordinaatit, suorien yhtälöt voidaan tällöin kirjoittaa muodossa $y = -x + 3$ ja $y = 2x$.

$f(x) = -x + 3$ → $y = -x + 3$

$g(x) = 2x$ → $y = 2x$

**Yhtälöparin** avulla voidaan tarkastella tilanteita, joissa kahden yhtälön halutaan toteutuvan samanaikaisesti. Jos siis halutaan tutkia, milloin suorien $y = -x + 3$ ja $y = 2x$ yhtälöt toteutuvat samanaikaisesti, muodostetaan yhtälöpari

$$\begin{cases} y = -x + 3 \\ y = 2x \end{cases}$$

Yhtälöparissa kirjoitetaan aaltosulkumerkin perään ne yhtälöt, joiden yhteistä ratkaisua haluaan etsiä.

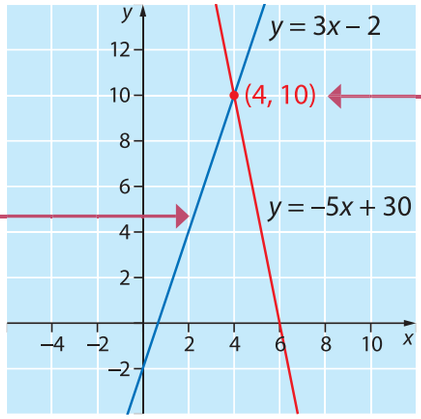
Yhtälöparin ratkaisuna ovat ne muuttujien $x$ ja $y$ arvot, joilla molemmat yhtälöt toteutuvat samanaikaisesti. Kuvan perusteella suorat leikkaavat toisensa pisteessä $(1, 2)$. Koska suorien leikkauspisteen koordinaatit toteuttavat samanaikaisesti molemmat suorien yhtälöt, yhtälöparin ratkaisuna on $x = 1$ ja $y = 2$.

**ESIMERKKI 1**

Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = -5x + 30 \end{cases}$ graafisesti eli kuvaajan avulla.

**RATKAISU**

Piirretään laskimella suorien kuvaajat koordinaatistoon.




Kuvaaja voidaan piirtää laskimella joko funktion $f(x) = 3x - 2$ tai yhtälön $y = 3x - 2$ avulla.

Jos leikkauspiste ei näy, kuvaajanäkymää on pienennettävä niin, että leikkauspiste saadaan näkyviin.

Molemmat yhtälöt toteutuvat suorien leikkauspisteessä. Etsitään laskimella kuvasta leikkauspisteen koordinaatit.

Koska leikkauspiste on (4, 10), yhtälöparin ratkaisu on $x = 4$ ja $y = 10$.

**VASTAUS**

$x = 4$ ja $y = 10$

Vastaus voidaan antaa myös muodossa $\begin{cases} x = 4 \\ y = 10 \end{cases}$.

### Laskimen tai muun apuvälineen käyttö

**Funktion kuvaajan piirtäminen**

- Kuvaajia voidaan piirtää laskimella joko funktion lausekkeen avulla tai pistejoukkoa kuvaavan yhtälön avulla. Selvitä omasta laskimestasi, kuinka saat erilaiset kuvaajat piirrettyä.
- Kuvaajanäkymän asetuksia pitää usein pystyä muuttamaan. Selvitä laskimestasi, kuinka suurennat tai pienennät kuvaajanäkymää.

**Yhtälöparin graafinen ratkaiseminen**

- Yhtälöparin graafinen ratkaisu perustuu kuvaajien leikkauspisteen etsimiseen. Selvitä omasta laskimestasi, kuinka saat määritettyä kuvaajien leikkauspisteen koordinaatit.

Yhtälöpareja ratkaistaan laskimella ilman kuvaajaa seuraavassa luvussa.

**Lineaarinen yhtälöpari** sisältää vain ensimmäisen asteen termejä. Jos yhtälöiden kaikki termit eivät ole ensimmäistä astetta, yhtälöpari on **epälineaarinen**.

Yhtälöparissa yhtälö on **ratkaistussa muodossa**, jos se on ratkaistu toisen muuttujan suhteen.

| | **Lineaarinen yhtälöpari** | **Epälineaarinen yhtälöpari** |
|---|---|---|
| | $\begin{cases} y - 2x = 0 \\ y - 3x - 2 = 0 \end{cases}$ | $\begin{cases} y - 2x - 4 = 0 \\ y - x^2 - 4x = 0 \end{cases}$ |
| **Ratkaistu muoto** | $\begin{cases} y = 2x \\ y = 3x + 2 \end{cases}$ | $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = x^2 + 4x \end{cases}$ |

Kun yhtälöparin yhtälöistä ainakin toinen on esitetty ratkaistussa muodossa, yhtälöpari voidaan ratkaista algebrallisesti **sijoitusmenetelmällä**.

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 3x + 2 \end{cases}$$

Koska ylemmän yhtälön mukaan $y = 2x$, sijoitetaan alempaan yhtälöön muuttujan $y$ paikalle $2x$.

$$2x = 3x + 2$$

$$2x - 3x = 2$$

Yhtälö sisältää enää yhden muuttujan, joka voidaan ratkaista.

$$-x = 2 \quad \big| : (-1)$$

$$x = -2$$

$$y = 2 \cdot (-2) = -4$$

Saatu $x$:n arvo sijoitetaan esimerkiksi yhtälöön $y = 2x$, jolloin saadaan arvo myös $y$:lle.

Lineaarisen yhtälöparin ratkaisuna on tavallisesti yksikäsitteinen lukupari $(x, y)$. Ratkaisuja voi olla myös ääretön määrä tai ratkaisuja ei ole lainkaan. Epälineaarisella yhtälöparilla voi olla ratkaisuna yksi tai useampia lukupareja $(x, y)$, ääretön määrä ratkaisuja tai ei lainkaan ratkaisua.

**ESIMERKKI 2**

Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} y = 4x - 1 \\ 2x - 3y = -7 \end{cases}$.

**RATKAISU**

Yhtälöparin ensimmäinen yhtälö on jo valmiiksi ratkaistussa muodossa, joten ratkaistaan yhtälö sijoitusmenetelmällä.

**1** Sijoitetaan ensimmäisestä yhtälöstä $y$:n lauseke jälkimmäiseen yhtälöön $y$:n paikalle.

$$\begin{cases} y = 4x - 1 \\ \qquad\downarrow \\ 2x - 3y = -7 \end{cases}$$

$$2x - 3(4x - 1) = -7$$

Saadaan yhtälö $2x - 3(4x - 1) = -7$, joka sisältää vain tuntemattoman $x$.

**2** Ratkaistaan saadusta yhtälöstä $x$.

$$\begin{aligned} 2x - 3(4x - 1) &= -7 \\ 2x - 12x + 3 &= -7 \\ 2x - 12x &= -7 - 3 \\ -10x &= -10 \qquad |: (-10) \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Arvo $x = 1$ voidaan sijoittaa myös yhtälöön $2x - 3y = -7$.

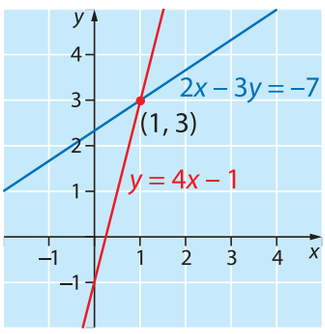
Haluttu $y$:n arvo saadaan kuitenkin tässä tilanteessa helpommin ensimmäisen yhtälön avulla.

**3** Sijoitetaan saatu muuttujan arvo ($x = 1$) jompaankumpaan alkuperäiseen yhtälöön.

→ Sijoitetaan $x = 1$ ensimmäiseen yhtälöön $y = 4x - 1$.

$$y = 4 \cdot 1 - 1 = 3$$

**VASTAUS** $x = 1$ ja $y = 3$



**ESIMERKKI 3**

Ratkaise yhtälöpari.

**a)** $\begin{cases} 6x + 10y = 2 \\ 5y = -3x + 5 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 4y = 4 \\ y = -\frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$

**RATKAISU**

**a)** Kumpikaan yhtälöistä ei ole ratkaistussa muodossa. Jälkimmäisestä yhtälöstä on kuitenkin helppo ratkaista lauseke muuttujalle $y$.

$$5y = -3x + 5 \qquad |: 5$$

$$y = -\frac{3}{5}x + 1$$

Sijoitetaan saatu $y$:n lauseke ensimmäiseen yhtälöön $6x + 10y = 2$.

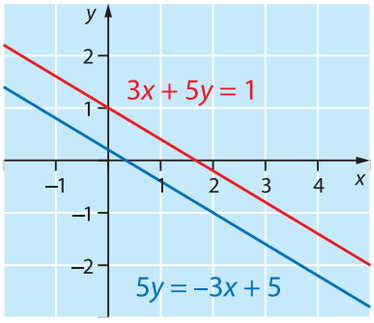
$$6x + 10\left(-\frac{3}{5}x + 1\right) = 2$$

$$6x + \frac{\overset{2}{\cancel{10}} \cdot (-3x)}{\cancel{5}} + 10 = 2$$

$$6x - 6x = 2 - 10$$

$$0 = -8$$

Saatu väite $0 = -8$ on epätosi. Yhtälöllä ei ole ratkaisua, joten yhtälöparillakaan ei ole ratkaisua.




Yhtälöitä kuvaavat suorat ovat yhdensuuntaisia, joten suorat eivät leikkaa toisiaan. Siksi yhtälöparilla ei ole ratkaisua.

**b)** Sijoitetaan jälkimmäisestä yhtälöstä muuttujan $y$ lauseke ensimmäiseen yhtälöön.

$$\begin{cases} 2x + 4y = 4 \\ \qquad\uparrow \\ y = -\frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$$

$$2x + 4\left(-\frac{1}{2}x + 1\right) = 4$$

$$2x + \frac{\overset{2}{\cancel{4}} \cdot (-1)}{\cancel{2}}x + 4 = 4$$

$$2x - 2x = 4 - 4$$

$$0 = 0$$

Saatu väite $0 = 0$ on tosi. Mikä tahansa luku $x$ toteuttaa yhtälön, joten yhtälöparilla on äärettömän monta ratkaisua $(x, y)$.

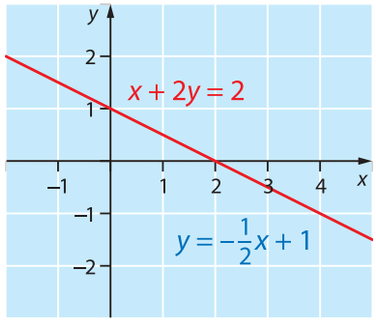
Kaikki lukuparit $(x, y)$ eivät kuitenkaan kelpaa yhtälöparin ratkaisuksi. Ratkaistaan myös toisesta yhtälöstä lauseke muuttujalle $y$.

$$2x + 4y = 4$$

$$4y = -2x + 4 \quad |: 4$$

$$y = -\frac{1}{2}x + 1$$

Huomataan, että kyseessä on saman suoran yhtälö.




Tällaisessa tilanteessa, jossa $x$-koordinaatille saadaan äärettömän monta ratkaisua, yhtälöparissa esiintyviä yhtälöitä kuvaa koordinaatistossa täsmälleen sama suora. Ratkaisuksi kelpaavat kaikki tämän suoran pisteet $(x, y)$.

**VASTAUS**

**a)** Ei ratkaisua.

**b)** Ratkaisuna ovat kaikki suoran $y = -\frac{1}{2}x + 1$ pisteet.

**ESIMERKKI 4**

Määritä paraabelin $y = -x^2 - 2x + 1$ ja suoran $3x + y = -1$ leikkauspisteiden koordinaatit.

**RATKAISU**

Leikkauspisteissä toteutuvat molemmat yhtälöt, joten muodostetaan yhtälöpari. Ratkaistaan yhtälöpari sijoittamalla ensimmäisestä yhtälöstä $y$:n lauseke jälkimmäiseen yhtälöön.

$$\begin{cases} y = -x^2 - 2x + 1 \\ \quad\downarrow \\ 3x + y = -1 \end{cases}$$

$$3x + (-x^2 - 2x + 1) = -1$$

Sievennetään yhtälöä ja ratkaistaan siitä $x$.

$$3x - x^2 - 2x + 1 = -1$$

$$-x^2 + x + 2 = 0$$

$a = -1,\ b = 1,\ c = 2$

Ratkaisukaava:

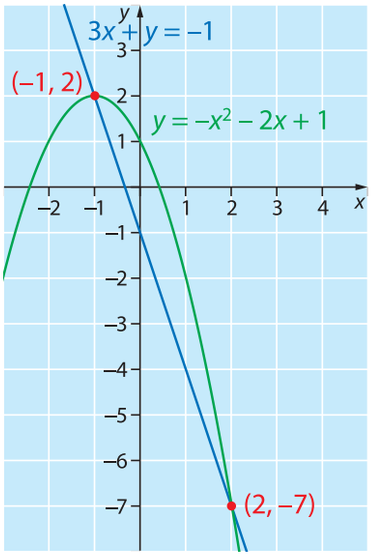
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2}}{2 \cdot (-1)}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2}$$

$$x = \frac{-1 \pm 3}{-2}$$

$$x = \frac{-1 + 3}{-2} = -1 \quad \text{tai} \quad x = \frac{-1 - 3}{-2} = 2$$




Yhtälöllä on kaksi ratkaisua, joten suoralla ja paraabelilla on kaksi leikkauspistettä. Ratkaistaan leikkauspisteiden $y$-koordinaatit sijoittamalla saadut $x$:n arvot paraabelin $y = -x^2 - 2x + 1$ lausekkeeseen.

- Kun $x = -1$, niin $y = -(-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 1 = -1 + 2 + 1 = 2$.
- Kun $x = 2$, niin $y = -2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = -4 - 4 + 1 = -7$.

**VASTAUS**

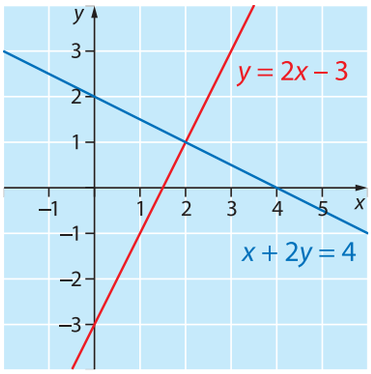
Paraabeli ja suora leikkaavat pisteissä $(-1, 2)$ ja $(2, -7)$.

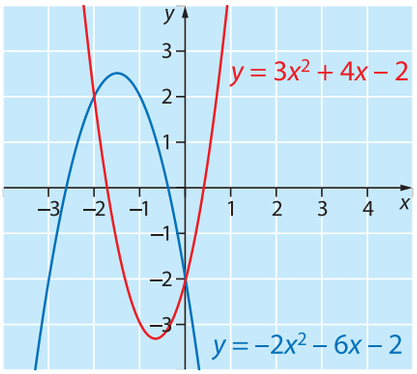
# Tehtävät

**161.** Ratkaise yhtälöpari kuvan avulla.

**a)** $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} y = -2x^2 - 6x - 2 \\ y = 3x^2 + 4x - 2 \end{cases}$




**162.** Tutki, onko $x = 2$ ja $y = 4$ yhtälöparin ratkaisu.

**a)** $\begin{cases} 6x - 2y = 4 \\ y = 5x - 6 \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} y = 3x - 2 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$

**163.** Tutki, onko piste $(-3, 5)$ suorien $y = -3x - 4$ ja $y = x + 8$ leikkauspiste.

E2

**164.** Ratkaise yhtälöpari.

**a)** $\begin{cases} y = 2x + 1 \\ 2x + y + 3 = 0 \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} x = 3y + 2 \\ -x + 5y = 8 \end{cases}$

**165.** Ratkaise yhtälöpari.

**a)** $\begin{cases} 2x + 3y + 23 = 0 \\ y = 3x - 4 \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} 3x - 6y = 0 \\ y = x + 1 \end{cases}$

**166.** Ratkaise suorien $y = 3x + 1$ ja $y = -x + 1$ leikkauspisteen koordinaatit.

**167.** Missä pisteessä funktioiden $f(x) = 5x - 4$ ja $g(x) = x + 4$ kuvaajat leikkaavat toisensa?

E3

**168.** Ratkaise yhtälöpari.

**a)** $\begin{cases} 2y = -2x + 6 \\ 4x + 4y = 12 \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} 3x + 9y = 18 \\ y = -\frac{1}{3}x - 2 \end{cases}$

**169.** Ratkaise yhtälöpari.

**a)** $\begin{cases} y = \frac{2}{5}x + 3 \\ -4x + 10y = 50 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - 4y = 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + 1 \end{cases}$

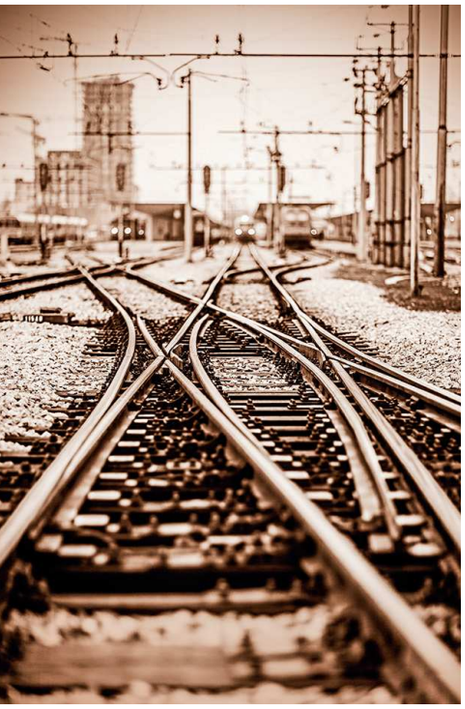
**170.** Määritä luvut $x$ ja $y$, jotka toteuttavat molemmat yhtälöt.

**a)** $-3x + 5y = 6$ ja $y = 2x - 3$

**b)** $3y = 6x - 3$ ja $x + y = 8$

E4

**171.** Määritä paraabelin $y = x^2 - 3x + 2$ ja suoran $y - 2x + 4 = 0$ leikkauspisteiden koordinaatit.



**172.** Ratkaise yhtälöpari.

**a)** $\begin{cases} y = 2x - 6 \\ y = -x^2 + 5x - 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y = -2x + 3 \\ x^2 - y + 4 = 0 \end{cases}$

**173.** Ratkaise yhtälöpari.

**a)** $\begin{cases} 4x + y = 3 \\ y = -x^2 - x + 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ y = 2x^2 - 3x + 4 \end{cases}$

**174.** Missä koordinaatiston pisteissä suora $y = 5x - 2$ leikkaa

**a)** suoran $15x - 3y = 6$

**b)** paraabelin $y = x^2 + 8x - 12$?

**175.** Laske paraabelien $y = 2x^2 - x - 1$ ja $y = x^2 + 3x + 4$ leikkauspisteiden koordinaatit.

**176.** Missä pisteissä paraabeli $y = -x^2 + 4x - 7$ leikkaa

**a)** suoran $9x - y = 3$

**b)** paraabelin $y = x^2 + 3x - 7$?

**177.** **a)** Tiedetään, että yhtälöpari $\begin{cases} -3ax + 4by = 6 \\ ay = 2x + b \end{cases}$ toteutuu, kun $x = -2$ ja $y = 1$. Mihin muotoon yhtälöpari voidaan tällä perusteella kirjoittaa?

**b)** Millä vakioiden $a$ ja $b$ arvoilla $x = -2$, $y = 1$ on yhtälöparin ratkaisu?

E1

**178.** Ratkaise yhtälöpari kuvaajan avulla.

**a)** $\begin{cases} y = 3x - 5 \\ 2x + y = 15 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x + 2y = 1 \\ y = -2x + 3 \end{cases}$

**179.** Ratkaise yhtälöpari graafisesti.

**a)** $\begin{cases} y = 4x - 3 \\ 8x - 2y = 10 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 14x + 2y = 6 \\ y = -7x + 3 \end{cases}$

**180.** Ratkaise kuvaajan avulla suorien $y = 7x - 11$ ja $9x - 2y = -28$ leikkauspiste.

**181.** Ratkaise kuvaajan avulla, missä pisteissä suora $y = -7x + 3$ ja paraabeli $y = x^2 - 11x - 42$ leikkaavat.

### Sekalaisia tehtäviä

**182.** Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} 6x - 3y = 6 \\ y = -2x + 1 \end{cases}$.

**183.** Ratkaise yhtälöpari.

**a)** $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 6y = 4x - 6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} y = -4x + 5 \\ 8x + 2y = -3 \end{cases}$

**184.** Missä pisteissä suora $y = 2x - 9$ leikkaa

**a)** suoran $x - 2y = 6$

**b)** paraabelin $y = 2x^2 - 3x - 12$?

**185.** Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} y = -3x^2 + 5x + 8 \\ y = -2x^2 + x - 4 \end{cases}$.

**186.** Ratkaise kuvaajan avulla suoran $y = 8x - 45$ ja

**a)** suoran $5x + 2y = 36$

**b)** paraabelin $y = x^2 + 7x - 135$

leikkauspisteet.

# 3.2 Yhtälöpari sovellustehtävissä

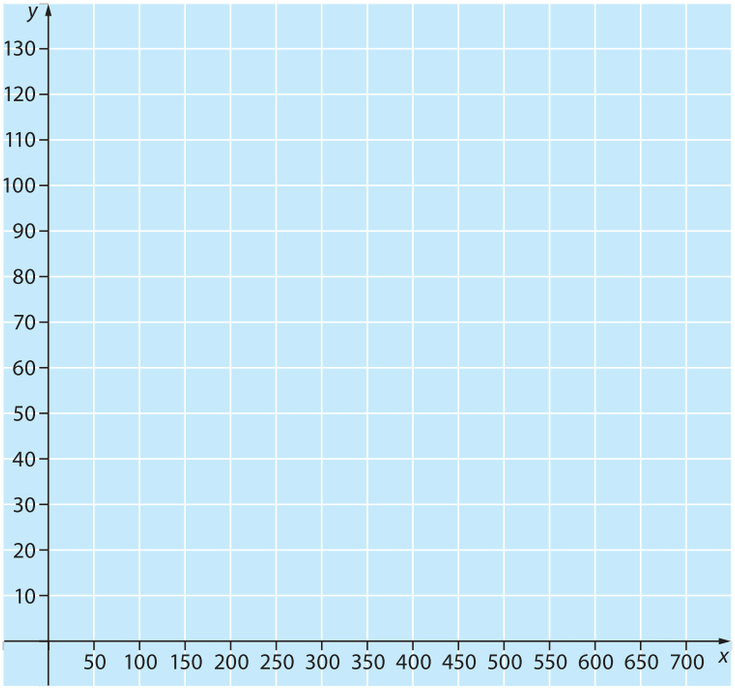
**Pohdinta**

Turisti haluaa vuokrata auton lomansa ajaksi. Autovuokraamo A veloittaa asiakkaalta 30 €:n perusmaksun. Sen lisäksi asiakas maksaa 0,20 € jokaiselta ajetulta kilometriltä. Kilpaileva vuokraamo B veloittaa perusmaksuna 50 €, mutta laskuttaa vain 0,10 € jokaiselta ajetulta kilometriltä.

**a)** Muodosta yhtälöt, jotka kuvaavat vuokran kokonaiskustannuksia $y$ (€), kun loman aikana ajetaan $x$ kilometriä.

- Vuokraamo A:
- Vuokraamo B:

**b)** Piirrä laskimen avulla samaan koordinaatistoon kuvaajat, jotka mallintavat $y$:n ja $x$:n välistä riippuvuutta kummankin vuokraamon tapauksessa.




**c)** Päättele kuvaajan avulla, kumpi vuokraamo kannattaa valita, kun loman aikana ajetaan 250 km.

**d)** Päättele kuvaajan avulla, millä ajokilometreillä vuokraamot ovat yhtä edulliset.

Sanallisessa tehtävässä voi muodostua yhtälö, jossa ratkaistavia tuntemattomia onkin kaksi kappaletta. Nämä tuntemattomat voidaan ratkaista yksikäsitteisesti vain, jos tilanteesta voidaan muodostaa kaksi yhtälöä. Näistä kahdesta yhtälöstä muodostuu siis **yhtälöpari**.

Jos laskin on käytössä, yhtälöpari on helppo ratkaista sopivan laskintoiminnon avulla. Ilman laskinta tarvitaan menetelmä, jolla yhtälöpari saadaan ratkaistua. Edellisessä luvussa ratkaistiin käyrien leikkauspisteitä sijoitusmenetelmän avulla. Yhtälöpari voidaan ratkaista myös **yhteenlaskumenetelmän** avulla.

Yhteenlaskumenetelmässä toinen tuntemattomista pyritään ”hävittämään” muokkaamalla yhtälöitä sopivaan muotoon. Menetelmää kutsutaan siksi myös eliminointimenetelmäksi. Yhtälöparin ratkaisussa edetään seuraavasti:

**1** Kerrotaan yhtälö sellaisella luvulla, että toinen tuntemattomista saadaan eliminoitua, kun yhtälöt lasketaan puolittain yhteen.

$$\begin{cases} -5x + 3y = 2 \\ -3x + 6y = 11 \end{cases} \quad \Big| \cdot (-2)$$

$$\begin{cases} 10x - 6y = -4 \\ -3x + 6y = 11 \end{cases}$$

**2** Lasketaan yhtälöt puolittain yhteen.

$$+ \begin{cases} 10x - 6y = -4 \\ -3x + 6y = 11 \end{cases}$$

$$7x = 7$$

Kun $y$:n kertoimet ovat toistensa vastalukuja, tuntematon $y$ häviää.

**3** Ratkaistaan muodostunut yhden muuttujan yhtälö.

$$7x = 7 \quad \Big| : 7$$

$$x = 1$$

**4** Ratkaistaan toinen tuntematon sijoittamalla saatu arvo toiseen alkuperäisistä yhtälöistä.

$$-5 \cdot 1 + 3y = 2$$

$$3y = 7 \quad \Big| : 3$$

$$y = \frac{7}{3}$$

Arvo $x = 1$ sijoitetaan yhtälöön $-5x + 3y = 2$.

Sijoitus olisi voitu tehdä myös toiseen yhtälöön.

**5** Kirjoitetaan vastaus.

$x = 1$ ja $y = \frac{7}{3}$

**ESIMERKKI 1**

Ratkaise yhtälöpari.

**a)** $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ -2x + y = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2x + 5y = 3 \\ -3x + 4y = 7 \end{cases}$

**RATKAISU**

**a)** Kun jälkimmäinen yhtälö kerrotaan puolittain luvulla –2, tuntematon $y$ saadaan eliminoitua yhtälöparista.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ -2x + y = -1 \end{cases} \quad \Big| : (-2)$$

$$+ \begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$$

$$7x = 14 \quad \Big| : 7$$

$$x = 2$$

Sijoitetaan $x = 2$ yhtälöön $-2x + y = -1$ ja ratkaistaan $y$.

$$-2 \cdot 2 + y = -1$$

$$-4 + y = -1$$

$$y = 3$$

**b)** Kerrotaan ylempi yhtälö luvulla 3 ja alempi yhtälö luvulla 2. Yhtälöparista saadaan näin eliminoitua tuntematon $x$.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 3 \quad \Big| \cdot 3 \\ -3x + 4y = 7 \quad \Big| \cdot 2 \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 6x + 15y = 9 \\ -6x + 8y = 14 \end{cases}$$

$$23y = 23 \quad \Big| : 23$$

$$y = 1$$

Sijoitetaan $y = 1$ yhtälöön $2x + 5y = 3$.

$$2x + 5 \cdot 1 = 3$$

$$2x = -2 \quad \Big| : 2$$

$$x = -1$$

**VASTAUS**

**a)** $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$

**ESIMERKKI 2**

Koulun pihalla on autoja ja polkupyöriä yhteensä 30 kappaletta. Kulkuneuvoissa on yhteensä 76 rengasta. Muodosta yhtälöpari ja ratkaise sen avulla autojen ja polkupyörien määrät.

**RATKAISU**

Merkitään autojen määrää kirjaimella $x$ ja polkupyörien määrää kirjaimella $y$. Kootaan tehtävän tiedot taulukkoon ja muodostetaan sen avulla tarvittavat yhtälöt.

| | Määrä | Renkaita |
|---|---|---|
| **Autoja** | $x$ | $4x$ |
| **Polkupyöriä** | $y$ | $2y$ |
| **Yhteensä** | $x + y$ | $4x + 2y$ |

- Koska kulkuneuvoja on yhteensä 30, saadaan yhtälö $x + y = 30$.
- Koska renkaita on yhteensä 76, saadaan yhtälö $4x + 2y = 76$.

Muodostetaan yhtälöpari ja ratkaistaan se yhteenlaskumenetelmällä.

$$\begin{cases} x + y = 30 & \mid \cdot(-2) \\ 4x + 2y = 76 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} & \begin{cases} -2x - 2y = -60 \\ 4x + 2y = 76 \end{cases} \\ + & \\ \hline & 2x = 16 \qquad \mid : 2 \\ & x = 8 \end{array}$$

Sijoitetaan $x = 8$ yhtälöön $x + y = 30$.

$$8 + y = 30$$
$$y = 22$$

Pihalla on 8 autoa ja 22 polkupyörää.

**VASTAUS**

8 autoa ja 22 polkupyörää

**ESIMERKKI 3**

Ravintolan lounaslistalla on tarjolla alkuruokana salaattia tai keittoa. Molempiin ruokiin käytetään tomaattia. Yhteen salaattiannokseen kuluu 300 g tomaattia. Annoksen hinta on 5,90 €. Yhteen keittoannokseen kuluu 150 g tomaattia. Annoksen hinta on 4,10 €. Päivän aikana tomaatteja kuluu annoksiin yhteensä 32,1 kg. Alkuruuat tuottavat ravintolalle 704,90 €. Kuinka monta salaatti- ja keittoannosta päivän aikana myydään?

**RATKAISU**

Merkitään päivän aikana myytyjen salaattiannosten määrää kirjaimella $x$ ja keittoannosten määrää kirjaimella $y$. Kootaan tehtävänannosta tiedot taulukkoon ja muodostetaan sen avulla yhtälöt.

Muutetaan kaikki tomaattien määrät kilogrammoiksi.

300 g = 0,3 kg

150 g = 0,15 kg

| | Määrä | Tomaatin kulutus (kg) | Tuotto (€) |
|---|---|---|---|
| **Salaattiannoksia** | $x$ | $0{,}3x$ | $5{,}90x$ |
| **Keittoannoksia** | $y$ | $0{,}15y$ | $4{,}10y$ |
| **Yhteensä** | $x + y$ | $0{,}3x + 0{,}15y$ | $5{,}90x + 4{,}10y$ |

- Tomaattia kuluu yhteensä 32,1 kg, joten $0{,}3x + 0{,}15y = 32{,}1$.
- Alkuruokien tuotto on yhteensä 704,90 €, joten $5{,}90x + 4{,}10y = 704{,}90$.

Yhtälöparin ratkaisemiseen löytyy laskimista yleensä oma toiminto.

Muodostetaan yhtälöistä yhtälöpari ja ratkaistaan se laskimella.

$$\begin{cases} 0{,}3x + 0{,}15y = 32{,}1 \\ 5{,}90x + 4{,}10y = 704{,}90 \end{cases}$$

Yhtälöparin ratkaisuna on $x = 75$ ja $y = 64$.

Ravintola myy 75 annosta salaattia ja 64 annosta keittoa.

**VASTAUS**

75 salaattiannosta ja 64 keittoannosta

**ESIMERKKI 4**

Muuttofirma Liitoliikenne veloittaa perheen asunnon muutosta 320 €. Tämän lisäksi on maksettava 1,20 € kilometriä kohden. Kilpaileva yritys Kodinonni veloittaa perheeltä 280 € ja kilometrikorvaus on 1,40 €.

**a)** Muodosta matkan pituuden $x$ (km) ja muuton kustannusten $y$ (€) välistä riippuvuutta kuvaavat yhtälöt ja piirrä niiden kuvaajat laskimen avulla.

**b)** Päättele kuvaajien avulla, kumpaa firmaa kannattaa käyttää, jos muutetaan 400 kilometrin päähän.

**c)** Perhe on laskenut, että kustannukset ovat samat riippumatta firmasta. Kuinka kauas perhe muuttaa?

**RATKAISU**

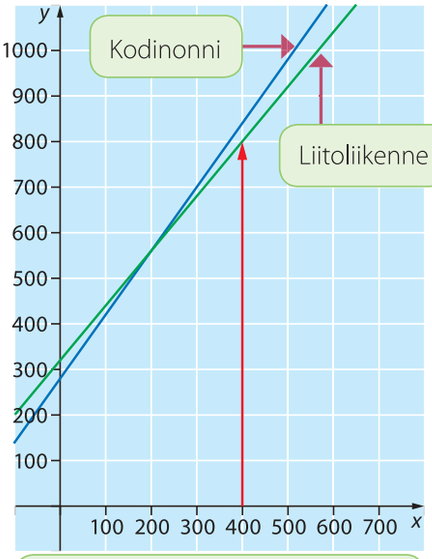
**a)** Kootaan tiedot taulukkoon.

| Firma | Matka (km) | Kilometri-korvaus (€) | Kustannukset $y$ (€) |
|---|---|---|---|
| Liitoliikenne | $x$ | 1,20$x$ | 320 + 1,20$x$ |
| Kodinonni | | 1,40$x$ | 280 + 1,40$x$ |

Riippuvuutta kuvaavat yhtälöt ovat:

- Liitoliikenne $y = 320 + 1{,}20x$
- Kodinonni $y = 280 + 1{,}40x$

Piirretään kuvaajat samaan koordinaatistoon.




Muuta kuvaajanäkymää niin, että saat tarkasteltavan kohdan ($x = 400$) näkyviin.

**b)** Kun $x = 400$, Liitoliikenteen kustannuksia kuvaava suora on Kodinonnen kustannuksia kuvaavan suoran alapuolella. Liitoliikenteen kustannukset ovat siis pienemmät.

**c)** Ratkaistaan muuttomatka yhtälöparin avulla.

$$\begin{cases} y = 320 + 1{,}20x \\ y = 280 + 1{,}40x \end{cases}$$

Laskimella saadaan $x = 200$ ja $y = 560$. Muuttomatkan pituus on siis 200 km ja kustannukset ovat 560 €.

**VASTAUS**

**a)** Liitoliikenne $y = 320 + 1{,}20x$ ja Kodinonni $y = 280 + 1{,}40x$

**b)** 200 km:n päähän

# Tehtävät

E1

**187.** Ratkaise yhtälöparit.

a) $\begin{cases} 3y + x = 5 \\ -y - 5x = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 7x + 5y = 3 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$

**188.** Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$. [S2013, 2b]

**189.** Ratkaise yhtälöparit.

a) $\begin{cases} 2 - x - y = 0 \\ 2 - 2x - y = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2(x + 3y) - 1 = 0 \\ -2(3x - 2y) - 8 = 0 \end{cases}$

**190.** Millä vakion $a$ arvolla yhtälöparilla $\begin{cases} 2x + (a+1)y = 5 \\ 3x + (a-2)y = a \end{cases}$ ei ole ratkaisua? [S2010, 10]

E2

**191.** Elokuvateatterin aikuisten lipun hinta oli 10 € ja lasten lipun hinta 5 €. Illan näytäntöön myytiin 300 lippua, joista kertyi rahaa yhteensä 2100 €. Kuinka monta aikuisten ja kuinka monta lasten lippua myytiin?

**192.** Maatilalla on lehmiä ja kanoja. Eläimiä on yhteensä 32. Jalkoja eläimillä on yhteensä 88. Laske lehmien ja kanojen määrät.

**193.** Viisi kahvia ja kahdeksan munkkia maksavat yhteensä 22 €. Neljä kahvia ja kuusi munkkia maksavat yhteensä 17 €. Muodosta yhtälöpari ja laske munkin ja kahvin hinta.

---

E3

**194.** Leipomo valmistaa kakkuja ja piirakoita. Yhteen kakkuun tarvitaan 5 dl jauhoja ja 2 kananmunaa. Piirakkaan tarvitaan 2,5 dl jauhoja ja 2 kananmunaa. Kaikkiaan jauhoja kuluu 62 litraa ja kananmunia käytetään 352. Kuinka monta kakkua ja piirakkaa leivotaan?

**195.** Bussilastillinen lomailijoita saapui viettämään päivää huvipuistoon. Jokainen lomailija osti rannekkeen, jolla pääsi huvipuiston kaikkiin laitteisiin. Aikuisten ranneke maksoi 27 € ja lasten ranneke 16 €. Rannekkeisiin käytettiin rahaa 772 €. Kuinka monta aikuista ja kuinka monta lasta bussissa oli, kun lomailijoita oli yhteensä 40?

**196.** Keltaista ja sinistä väripigmenttiä käytettiin kahden erisävyisen vihreän maalin sekoittamiseen. Maaliin A tarvittiin litraa kohden 80 g keltaista pigmenttiä ja 110 g sinistä pigmenttiä, maaliin B vastaavasti 120 g keltaista ja 90 g sinistä pigmenttiä. Kuinka monta litraa kumpaakin maalia valmistettiin, kun keltaista pigmenttiä käytettiin 3,2 kg ja sinistä 3,5 kg? [S2007, 8]

E4

**197.** Bensiinikäyttöisen auton verot ja vakuutukset olivat 650 € vuoden ajalta. Dieselauton vastaavat kulut olivat 880 €. Molemmat autot kuluttivat polttoainetta saman verran. Polttoainekulut kilometriä kohden olivat bensiiniautolle 8,4 snt/km ja dieselautolle 6,4 snt/km.

**a)** Esitä molemmille autoille vuoden kokonaiskustannuksia $y$ (€) esittävät yhtälöt, kun vuoden aikana ajetaan $x$ kilometriä. Piirrä laskimen avulla yhtälöiden kuvaajat.

**b)** Päättele kuvaajista, kumpi autotyyppi kannattaa valita, kun ajokilometrejä kertyy vuodessa 10 000 km?

**c)** Millä vuotuisella kilometrimäärällä ajoneuvojen kustannukset vuodessa ovat samat?

**198.** Kuntoklubi Pinnistys veloittaa asiakkaaltaan 6,00 € jokaiselta käyntikerralta. Kuntoklubi Ponnistus veloittaa käyntikerrasta vain 2,80 €. Ponnistuksen jäsenen on kuitenkin maksettava kiinteä vuosimaksu 120 €.

**a)** Esitä molemmille klubeille vuotuisia kustannuksia $y$ (€) esittävät yhtälöt, kun käyntikertoja on $x$ vuodessa.

**b)** Kuinka monta kertaa klubilla on käytävä, jotta kannattaa liittyä kuntoklubi Ponnistukseen?

**199.** Kaksi puhelinyhtiötä A ja B tarjosi puhelinliittymäpakettia, joiden hinnoittelu perustuu kiinteään kuukausittaiseen perusmaksuun ja lisämaksuun. Lisämaksun suuruus riippuu soitettujen puheluiden kestosta. Lisämaksua maksetaan kummassakin tapauksessa silloin, kun puheluiden kesto kuukaudessa ylittää 500 min. Liittymäpakettien hinnat ovat taulukossa.

| Paketti | Perusmaksu €/kk | Puhelujen hinta, kun puheaika ylittää 500 min (€/min) |
|---|---|---|
| A | 19,90 | 0,10 |
| B | 14,90 | 0,15 |

**a)** Aino harkitsee jommankumman liittymäpaketin ostamista. Hän tietää puhuvansa kuukaudessa yli 500 min. Muodosta lausekkeet $A(x)$ ja $B(x)$ kummankin yhtiön tarjoaman liittymäpaketin kokonaishinnalle yhden kuukauden aikana, kun Ainon kuukaudessa puhuma aika on $x$ minuuttia.

**b)** Kuinka suuri täytyisi kuukausittaisen puheajan olla, jotta kokonaishinnat olisivat samat?

**c)** Kuinka suuri on kokonaishintojen välinen ero, jos Aino puhuu kuukaudessa 1000 minuuttia?

## Sekalaisia

**200.** Ratkaise yhtälöparit.

**a)** $\begin{cases} 4x + y = 3 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} -2x + 2y = 3 \\ 3x - 5y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

**201.** Kukkaro sisältää yhden ja kahden euron kolikoita. Kolikoita on yhteensä 24. Kukkarossa on rahaa yhteensä 39 euroa. Muodosta yhtälöpari ja ratkaise sen avulla, kuinka monta yhden euron ja kuinka monta kahden euron kolikkoa kukkarossa on.

**202.** Banaaneista ja appelsiineista valmistetaan jälkiruoka. Yksi gramma banaania sisältää 0,84 kcal energiaa ja 0,18 g hiilihydraatteja. Yksi gramma appelsiinia sisältää 0,43 kcal energiaa ja 0,089 g hiilihydraatteja. Jälkiruoka-annos sisältää energiaa 118,8 kcal ja hiilihydraatteja 25,08 g. Kuinka monta grammaa banaania ja kuinka monta grammaa appelsiinia jälkiruoka-annos sisältää?

**203.** Kahden eri lämmitysmuodon vertailussa laskelmien perustana oli omakotitalo, jonka pinta-ala oli 140 $m^2$. Talossa oli neljä asukasta. Vertailun tulokset on koottu alla olevaan taulukkoon.

| Lämmitysmuoto | Investointi-kustannukset (€) | Energiakustannukset (€/vuosi) |
|---|---|---|
| Maalämpö | 16 500 | 750 |
| Öljylämmitys | 6500 | 1800 |

**a)** Muodosta kokonaiskustannuksia $y$ (€) esittävät yhtälöt molemmille lämmitysmuodoille, kun talossa asutaan $x$ vuotta.

**b)** Kuinka monta täyttä vuotta maalämpöä käyttävässä talossa on asuttava, jotta kustannukset olisivat pienemmät kuin öljylämmitteisessä talossa?

# 4 Verrannollisuus

## Tavoitteena on

- oppia muodostamaan suureiden välisiä suhteita
- oppia ratkaisemaan verrantomuotoisia yhtälöitä
- oppia tunnistamaan erilaisia verrannollisuuksiin liittyviä tilanteita
- oppia tarkastelemaan suoraan ja kääntäen verrannollisten suureiden välisiä riippuvuuksia yhtälöiden ja kuvaajien avulla.

- Miten muodostetaan kahden luvun suhde?
- Miten lukujen suhdetta käytetään erilaisissa yhtälöissä?
- Miten ratkaistaan verrantoyhtälö?
- Milloin suureet ovat
  – suoraan verrannolliset
  – kääntäen verrannolliset?
- Miten muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö, jos suureet ovat
  – suoraan verrannolliset
  – kääntäen verrannolliset?

- Miten ratkaistaan verrantoja ja muita lukujen suhteisiin liittyviä yhtälöitä?
- Millaisella kuvaajalla voidaan mallintaa
  – suoraan verrannollisten suureiden riippuvuutta
  – kääntäen verrannollisten suureiden riippuvuutta?
- Miten verrannollisuuden kuvaajan avulla voidaan ratkaista erilaisia tilanteita?
- Miten ratkaistaan suoraan ja kääntäen verrannollisiin tilanteisiin liittyviä yhtälöitä?
- Mikä on verrannollisuuskerroin ja miten se saadaan määritettyä?

# 4.1 Suhde ja verranto

**Pohdinta**

ISO 216 on kansainvälinen standardi, joka määrittelee suorakulmion muotoisten papereiden koot. Peruskoko A0:n pinta-ala on 1 $m^2$. Seuraavan koon, A1, pinta-ala on puolet edellisestä eli 0,5 $m^2$ ja niin edelleen.

**a)** Määritä taulukkoon paperin kannan pituuden ja korkeuden osamäärä kolmen desimaalin tarkkuudella.

| Koko | Kanta (mm) | Korkeus (mm) | $\frac{\text{Kanta}}{\text{Korkeus}}$ |
|---|---|---|---|
| A0 | 841 | 1189 | |
| A2 | 420 | 594 | |
| A4 | 210 | 297 | |

**b)** Päättele taulukon puuttuva pituus.

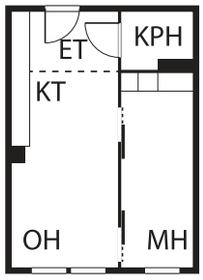
| Koko | Kanta (mm) | Korkeus (mm) |
|---|---|---|
| A4 | 210 | 297 |
| A6 | 105 | |
| A8 | | 74 |
| A10 | 26 | |

**c)** A3-paperin kanta on 297 mm pitkä. Kuinka suuri on tämän paperin korkeus? Anna vastaus millimetrin tarkkuudella.

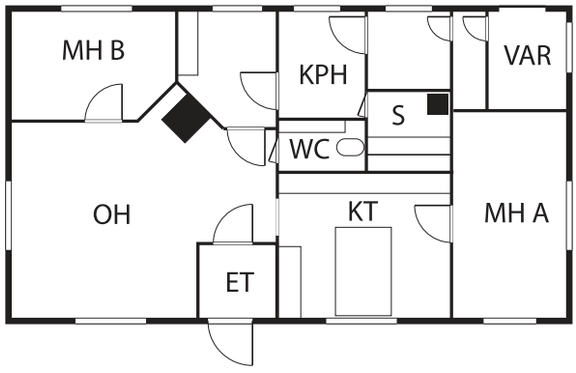
**d)** A1-paperin korkeus on 841 mm. Kuinka suuri on tämän paperin kanta? Anna vastaus millimetrin tarkkuudella.

**e)** Anna esimerkki sellaisen paperin mitoista, jonka kanta ja korkeus noudattavat edellä tarkasteltua säännönmukaisuutta.

Kahta lukua tai suuretta voidaan verrata esimerkiksi erotuksen tai osamäärän avulla.




Asunnon pinta-ala
$A_1 = 40\ \text{m}^2$




Asunnon pinta-ala
$A_2 = 160\ \text{m}^2$

- Isomman asunnon pinta-ala on $160\ \text{m}^2 - 40\ \text{m}^2 = 120\ \text{m}^2$ suurempi kuin pienemmän asunnon pinta-ala.
- Isomman asunnon pinta-ala on $\dfrac{160\ \cancel{\text{m}^2}}{40\ \cancel{\text{m}^2}} = \dfrac{160}{40} = 4$ kertaa niin suuri kuin pienemmän asunnon pinta-ala.

Kun kahta suuretta verrataan osamäärän avulla, vastaukseksi saadaan yksikötön luku. Tätä osamäärää voidaan kutsua myös lukujen väliseksi **suhteeksi** ja tulokseksi saatua yksikötöntä lukua **suhteen arvoksi** eli **suhdeluvuksi**. Kahden suureen suhde voidaan muodostaa kahdella tavalla.

Asuntojen pinta-alojen suhteen arvo voi olla 4 tai $\frac{1}{4}$.

pinta-alojen suhde

$$\frac{160\ \cancel{\text{m}^2}}{40\ \cancel{\text{m}^2}} = \frac{160}{40} \overset{(40}{} = 4 \qquad \frac{40\ \cancel{\text{m}^2}}{160\ \cancel{\text{m}^2}} = \frac{40}{160} \overset{(40}{} = \frac{1}{4}$$

suhteen arvo

Suhde tarkoittaa siis lukujen tai suureiden jakolaskua. Suhteiden avulla ilmaistaan esimerkiksi karttojen mittakaavoja tai todennäköisyyksiä vedonlyönnissä.

Lukujen $a$ ja $b$ suhde voidaan esittää murtolukumuodossa tai jakopisteen avulla.

$$\frac{a}{b} = a : b$$

Suhde esitetään yleensä mahdollisimman yksinkertaisessa muodossa, joten suhdetta kuvaava murtoluku supistetaan, mikäli mahdollista.

Ennen suhteen arvon laskemista suureiden yksiköt on muunnettava samoiksi.

| $a$ | $b$ | $\frac{a}{b} = a : b$ |
|---|---|---|
| 8 | 10 | $\frac{8}{10} \overset{(2}{=} \frac{4}{5} = 4 : 5$ |
| 40 $cm^2$ | 120 $cm^2$ | $\frac{40\ \cancel{cm^2}}{120\ \cancel{cm^2}} \overset{(40}{=} \frac{1}{3} = 1 : 3$ |
| 2,1 g | 1400 mg | $\frac{2{,}1\,g}{1400\,mg} = \frac{2100\ \cancel{mg}}{1400\ \cancel{mg}} \overset{(700}{=} \frac{3}{2} = 3 : 2$ |
| $4x$ | $5x$ | $\frac{4\cancel{x}}{5\cancel{x}} = \frac{4}{5} = 4 : 5$ |

**Suhde**

Suhde on kahden luvun tai suureen osamäärä.

- Suhde sievennetään ja esitetään murtolukuna tai jakopisteen avulla.
- Suhteen arvolla eli suhdeluvulla ei ole mittayksikköä.

**ESIMERKKI 1**

Metsänomistaja haluaa istuttaa hakkuualueelle männyntaimia. Hän palkkaa istutusurakkaan Joonan ja Jasminen. Urakasta maksetaan yhteensä 2100 €. Jasmine istuttaa 240 tainta ja Joona 180 tainta. Jasmine ja Joona jakavat palkan samassa suhteessa kuin he ovat taimia istuttaneet. Kuinka paljon palkkaa kumpikin saa?

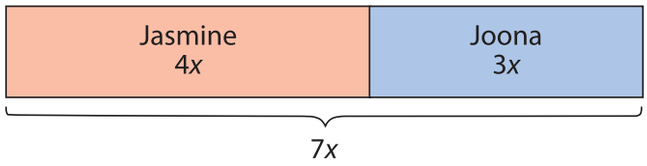
**RATKAISU**

Koska Jasmine istuttaa 240 tainta ja Joona 180 tainta, istutettujen taimien suhde on

$$\frac{240}{180}^{(60} = \frac{4}{3} = 4 : 3.$$

Jaetaan palkkio samassa suhteessa. Merkitään Jasminen osuutta $4x$:llä ja Joonan osuutta $3x$:llä.

Palkkioiden suhde on
$\frac{4x}{3x} = \frac{4}{3} = 4 : 3.$




Jasminen ja Joonan palkkiot ovat yhteensä $4x + 3x = 7x$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$7x = 2100 \quad | : 7$$
$$x = 300$$

Palkkiot saadaan sijoittamalla $x = 300$ lausekkeisiin $4x$ ja $3x$.

- Jasminen palkkio on $4 \cdot 300$ € = 1200 €.
- Joonan palkkio on $3 \cdot 300$ € = 900 €.

**VASTAUS**

Jasmine saa 1200 € ja Joona 900 €.

**ESIMERKKI 2**

Teräväpiirtotelevision ruudun kuvasuhde on 16:9. Kuvasuhteella tarkoitetaan suorakulmion muotoisen televisioruudun leveyden ja korkeuden suhdetta. Mitkä ovat ruudun mitat senttimetrin tarkkuudella, jos television ruudun ala on 9200 $\text{cm}^2$?

**RATKAISU**

Koska ruudun leveyden ja korkeuden suhde on 16:9, merkitään ruudun leveydeksi $16\boldsymbol{x}$ ja korkeudeksi $9\boldsymbol{x}$.

Ruudun pinta-alan lauseke on $16x \cdot 9x = 144x^2$.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se laskimella.

$$144x^2 = 9200$$

$$x = 7{,}993\ldots \text{ tai } x = -7{,}993\ldots$$

Koska sivujen pituudet eivät voi olla negatiivisia lukuja, ratkaisuksi kelpaa vain $x = 7{,}993\ldots$ .

Ruudun sivujen pituudet lasketaan sijoittamalla saatu $x$:n arvo lausekkeisiin $16x$ ja $9x$.

- Ruudun leveys on $16 \cdot 7{,}993\ldots$ cm $\approx$ 128 cm.
- Ruudun korkeus on $9 \cdot 7{,}993\ldots$ cm $\approx$ 72 cm.

**VASTAUS**

Ruudun mitat ovat 128 cm ja 72 cm.

Kun kaksi suhdetta merkitään yhtä suuriksi, syntyy **verrantoyhtälö** eli **verranto**.

Tarkastellaan verrantoa $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
Muokataan yhtälö muotoon, jossa ei ole nimittäjiä.

- Lavennetaan suhteet samannimisiksi.

$$\frac{a}{b} \overset{\cdot d}{=} \frac{c}{d} \overset{\cdot b}{}$$

- Kerrotaan yhtälön molemmat puolet nimittäjällä $bd$.

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd} \qquad \big| \cdot bd$$
$$ad = bc$$

Verranto $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ on siis yhtäpitävä yhtälön $ad = bc$ kanssa.

Yhtälö $ad = bc$ saadaan alkuperäisestä yhtälöstä $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ helpoiten **ristiin kertomalla**.

**Verrantoyhtälö**

Verrantoyhtälö $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ratkaistaan ristiin kertomalla.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$
$$ad = bc$$

**ESIMERKKI 3**

Ratkaise yhtälö

**a)** $\frac{x}{3}=\frac{6}{5}$ **b)** $\frac{4}{x}=\frac{5}{x+1}$ **c)** $\frac{x^2}{12}=\frac{3}{4}$.

**RATKAISU**

**a)** $\frac{x}{3}=\frac{6}{5}$ ← Kerrotaan ristiin.

$5x = 3 \cdot 6$

$5x = 18 \quad | : 5$

$x = \frac{18}{5}$

$x = 3\frac{3}{5}$

**b)** $\frac{4}{x}=\frac{5}{x+1}$ ← Muista käyttää sulkuja, kun toinen tekijöistä sisältää useamman termin.

$4(x+1) = 5x$

$4x + 4 = 5x$

$4x - 5x = -4$

$-x = -4 \quad | : (-1)$

$x = 4$

**c)** $\frac{x^2}{12}=\frac{3}{4}$

$4x^2 = 36 \quad | : 4$

$x^2 = 9$

$x = \pm\sqrt{9}$

$x = \pm 3$

**VASTAUS** **a)** $x = 3\frac{3}{5}$ **b)** $x = 4$ **c)** $x = \pm 3$

### Laskimen tai muun apuvälineen käyttö

Verrantoyhtälö kannattaa syöttää laskimeen murtolausekepohjan avulla, jolloin osoittajia ja nimittäjiä ei tarvitse kirjoittaa sulkujen avulla. Varsinainen yhtälön ratkaiseminen suoritetaan yhtälönratkaisutoiminnon avulla.

**ESIMERKKI 4**

Dubaissa sijaitsevan Burj Khalifa -tornin korkeus on 828 m. Seinällä olevassa valokuvassa tornin korkeus on 109 cm. Tornin ulkopuolella oleva suihkulähdejärjestelmä suihkuttaa vettä 150 m:n korkeuteen. Kuinka korkea vesisuihku on samassa valokuvassa?

**RATKAISU**

Muutetaan pituudet samoiksi yksiköiksi, jolloin pituuksien suhde voidaan laskea.

- Tornin korkeus 828 m = 82 800 cm.
- Vesisuihkun korkeus 150 m = 15 000 cm.

Tornin kuvan ja todellisen korkeuden suhde on $\frac{109 \text{ cm}}{82\,800 \text{ cm}}$.

Merkitään vesisuihkun korkeutta kuvassa kirjaimella $x$ (cm). Kuvan ja todellisen vesisuihkun korkeuden suhde on $\frac{x \text{ cm}}{15\,000 \text{ cm}}$.

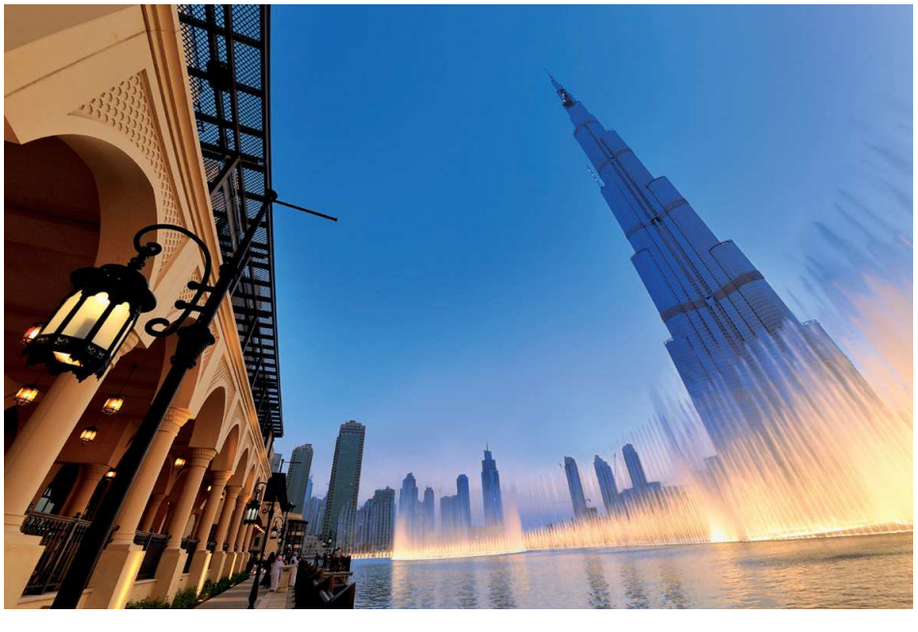
Koska kuva on pienennös todellisesta, pituuksien suhteet ovat yhtä suuret. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\frac{x}{15\,000} = \frac{109}{82\,800}$$

$$x = \frac{2725}{138} = 19{,}746\ldots \approx 20 \text{ (cm)}$$

**VASTAUS**

Vesisuihkun korkeus on 20 cm.



# Tehtävät

**204.** Määritä suureiden suhde.

**a)** 2 dm ja 10 cm **b)** 400 g ja 5 kg **c)** 5 l ja 2 dl

E1

**205.** Aatu ja Artturi ovat ostaneet yhden täyden lottokupongin eli 12 riviä. Aatu osallistuu peliin maksamalla 5 riviä ja Artturi maksamalla 7 riviä. Pojat voittavat lotossa 240 €. Miten voittosumma on jaettava poikien kesken?

**206.** Köyden pituus on 400 cm. Köysi on leikattava kahteen osaan siten, että osien suhde on 3:5. Mitkä ovat osien pituudet?

**207.** Kolme tietotekniikan opiskelijaa Steve, Bill ja Mark kehittävät vapaa-aikanaan tietokonepelin. He arvelevat, että pelistä saattaa tulla menestys ja päättävät perustaa osakeyhtiön. Kukin sijoittaa yhtiöön varojensa mukaan. Steve saa 300 osaketta, Mark 200 osaketta ja Bill 500 osaketta. Suuri pelialan yritys kiinnostuu poikien pelistä ja ostaa poikien osakkeet. Yritys maksaa osakkeista 3,0 miljoonaa euroa. Miten kauppasumma jaetaan poikien kesken?

**208.** Kahden kokonaisluvun suhde on 5:7. Määritä luvut, kun lukujen summa on 48.

E3

**209.** Ratkaise verrannot.

**a)** $\frac{x}{4} = \frac{6}{3}$ **b)** $\frac{x}{4} = \frac{x-1}{3}$ **c)** $\frac{2}{5} = \frac{10}{x^2}$

**210.** Ratkaise verrannot.

**a)** $\frac{2x}{5} = \frac{x+1}{3}$ **b)** $\frac{-4}{3x} = \frac{2}{x-5}$

**211.** Ratkaise verrannot.

**a)** $\frac{6}{3x-2} = \frac{2}{2-x}$ **b)** $\frac{x}{4} = \frac{25}{x}$

**212.** Ratkaise verrannot.

**a)** $\frac{3x^2}{x+1} = \frac{x}{3}$ **b)** $\frac{x+2}{x} = \frac{3x}{x+1}$

**213.** Pekka, Jukka ja Risto heittivät keihästä seuraavasti: Pekka 70 m, Jukka 65 m ja Risto 40 m.

a) Mikä on Pekan heiton pituuden suhde Riston heiton pituuteen?

b) Kuinka monikertainen Pekan heiton pituus on Riston heiton pituuteen verrattuna?

c) Mikä on Jukan ja Pekan heittojen pituuksien suhde?

**214.** Sekamehu valmistetaan ohjeen mukaan siten, että tiivisteen ja veden suhde on 1:8. Kuinka paljon tiivistettä ja kuinka paljon vettä on sekoitettava, kun valmiin juoman tilavuus on 2,5 litraa? Anna vastaus desilitroina.

Tasakylkisen kolmion kyljet ovat yhtä pitkät.

**215.** Pellosta rajataan tutkimusta varten koealue, joka on tasakylkisen kolmion muotoinen. Kolmion kyljen ja kannan pituuksien suhde on 7:4. Määritä kolmion sivujen pituudet, kun kolmion piiri on 126 m.

**216.** Pronssi on metalliseos, joka sisältää pääasiassa kuparia ja tinaa. Pronssia käytetään nykyisin esimerkiksi rummuissa olevien peltien ja lautasten valmistamiseen. Yleisimmin käytetty seos on b20-pronssi. Siinä tinan ja kuparin sekoitussuhde on 1:4. Rummun lautasen massa on 1440 g. Kuinka monta grammaa kuparia lautanen sisältää?

E2

**217.** Suomen lipussa kannan ja korkeuden pituuksien suhde on 18:11. Lipun ala riippuu lipputangon korkeudesta. Esimerkiksi 9 metrin mittaiseen lipputankoon on kiinnitettävä lippu, jonka ala on 367,5 $dm^2$. Määritä tämän lipun kanta ja korkeus senttimetrin tarkkuudella.

**218.** Iso-Britannian valuuttayksikkö on punta (£). Viiden punnan setelissä kannan ja korkeuden suhde on 27:14. Laske setelin mitat millimetrin tarkkuudella, kun setelin pinta-ala on 94,5 $cm^2$.

Kolmion ala

$$A = \frac{\text{kanta} \cdot \text{korkeus}}{2}.$$

**219.** Kolmion kannan ja korkeuden suhde on 4:7. Määritä kolmion kanta ja korkeus, kun kolmion pinta-ala on 1134 $cm^2$.

**220.** Liikennemerkkien koot on sovittu kansainvälisellä sopimuksella. Varoitusmerkit ovat kolmion muotoisia. Kolmion kannan ja korkeuden suhde on 15:13 ja kolmio on tasasivuinen. Merkin pinta-ala on 35,1 $dm^2$. Mikä on varoitusmerkin sivun pituus?

E4

**221.** La Grande Arche on Pariisissa sijaitseva monumentti, jonka korkeus on 110 m. Se valmistui 1990 ja symbolisoi humaaneja ihanteita. Valokuvassa monumentin korkeus oli 12 cm. Kuinka pitkä olisi 180 cm:n pituinen henkilö samassa kuvassa monumentin juurella?

**222.** Kuvataiteen kurssilla tehdään pienoismalli. Tiina rakentaa Ruususen linnan satukirjan kuvan mukaan. Kuvassa linnan tornin korkeus on 15,5 cm. Tornissa on kaari-ikkuna, jonka korkeus on 1,2 cm. Kuinka korkea torni on pienoismallissa, kun pienoismallissa ikkunan korkeus on 4,4 cm?

**223.** Monisteessa olevan piirroksen korkeus on 27,0 cm. Tästä tehdään kopiokoneella pienennys suhteessa 5:3. Mikä on pienennetyn piirroksen korkeus?

**224.** Olkoon $k$ kokonaisluku. Kun $k$ kerrotaan positiivisella luvulla $a$, alkuperäisen luvun ja tulon suhde on 7:9. Mikä on luku $a$?

### Sekalaisia

**225.** Ratkaise verrannot. **a)** $\frac{x}{3} = \frac{2}{9}$ **b)** $\frac{x}{2+x} = \frac{4}{5}$

**226.** Ratkaise verrannot. **a)** $\frac{x}{x^2-3} = \frac{3}{2x}$ **b)** $\frac{x}{2} = \frac{3}{x-1}$

**227.** Valokuva esittää Tampereella sijaitsevaa näköalatornia Näsinneulaa.

**a)** Valokuvan kannan ja korkeuden suhde on 2:3. Laske kuvan mitat, kun sen pinta-ala on 155 $\text{cm}^2$.

**b)** Näsinneulan vieressä kasvaa puu, jonka korkeus on 31 m. Puun korkeus kuvassa on 1,8 cm. Mikä on Näsinneulan todellinen korkeus, kun sen korkeus kuvassa on 10,0 cm?

**228.** Mirka on 15 cm lyhyempi kuin Jonathan. Kuinka pitkiä he ovat, kun heidän pituuksien suhde on 34:37?

**229.** Yhtiömuotoisessa paritalossa on kaksi asuntoa. Suuremman asunnon ala on 180 $\text{m}^2$ ja pienemmän ala 140 $\text{m}^2$. Asuntoihin tehdään putkiremontti, jonka kokonaiskustannukset ovat 112 000 €. Kustannukset jaetaan asuntojen alojen suhteessa. Miten kustannukset on jaettava asuntojen kesken?

**230.** Eero Saarisen suunnittelema St. Louis Gateway Arch sijaitsee Mississippi-joen rannalla. Se on valmistettu teräksestä ja pystytettiin Louisianan territorion maakaupan muistoksi. Kaari on kuvainnollisesti portti Yhdysvaltojen länteen. Sen korkeus on 630 jalkaa. Kuinka korkea muistomerkki on postikortissa, joka on pienennös suhteessa 1:960? Anna vastaus senttimetreinä. (1 jalka = 0,3048 m)

# 4.2 Suoraan verrannollisuus

**Pohdinta**

Tehdas valmistaa erikokoisia alumiinikuutioita. Taulukkoon on koottu muutaman kappaleen tilavuudet ($dm^3$) ja massat (kg).

| Tilavuus ($dm^3$) | Massa (kg) |
|---|---|
| 1 | 2,7 |
| 2 | 5,4 |
| 4 | 10,8 |
| 8 | |
| 10 | |
| | 54 |

**a)** Täydennä taulukko.

**b)** Laske kahden alumiinikuution tilavuuksien suhde.

**c)** Laske vastaavien alumiinikuutioiden massojen suhde. Mitä huomaat?

**d)** Millaisen yhtälön voit seuraavasta tilanteesta muodostaa?

| Tilavuus ($dm^3$) | Massa (kg) |
|---|---|
| 1 | 2,7 |
| $x$ | 8,1 |

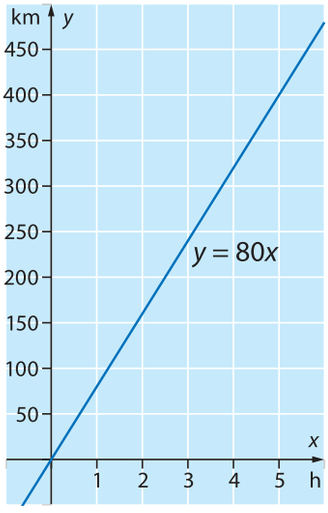
**e)** Ratkaise muodostamasi yhtälö.

**f)** Muodosta vastaavalla tavalla yhtälö seuraavasta tilanteesta ja ratkaise yhtälöstä $y$.

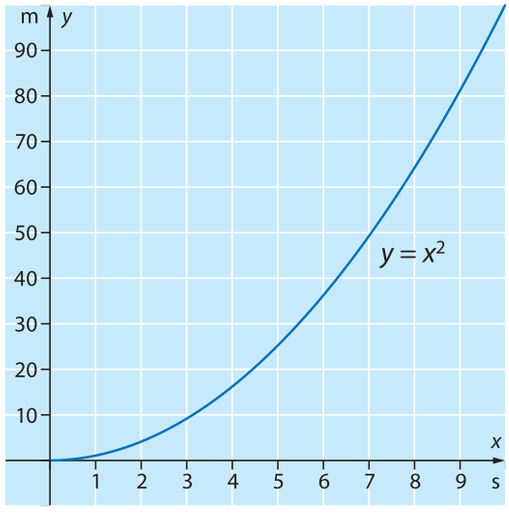
| Tilavuus ($dm^3$) | Massa (kg) |
|---|---|
| 1 | 2,7 |
| $x$ | $y$ |

**g)** Piirrä edellisessä kohdassa saadun riippuvuuden kuvaaja. Millainen kuvaaja on?

Matematiikan avulla tarkastellaan usein eri suureiden välisiä riippuvuuksia. Jos suureiden välistä riippuvuutta voidaan kuvata yhtälöllä, niiden tarkastelu matemaattisesti on helpompaa. Aikaisemmin on esitelty ensimmäisen ja toisen asteen polynomifunktioihin liittyviä tilanteita, joissa riippuvuutta voidaan kuvata polynomifunktion avulla.




Matkan $y$ (km) riippuvuus matkaan käytetystä ajasta $x$ (h), kun ajetaan nopeudella 80 km/h.




Matkan $y$ (m) riippuvuus matkaan käytetystä ajasta $x$ (s), kun kiihtyvyys on 2 m/s$^2$.

Suureiden välistä riippuvuutta voidaan tarkastella myös suureiden välisten suhteiden avulla. Suureita, joiden suhde on vakio, sanotaan **suoraan verrannollisiksi** suureiksi. Tällöin molempien suureiden arvo kasvaa tai pienenee samassa suhteessa.

Esimerkiksi tuotteen määrä ja hinta ovat suoraan verrannollisia.

| **Omenien määrä (kg)** | **Omenien hinta (€)** |
|---|---|
| 1,5 | 3,0 |
| 6,0 | 12,0 |

· 4 (omenien määrä)

· 4 (omenien hinta)

Omenien määrän suhde

$$\frac{6{,}0\text{ kg}}{1{,}5\text{ kg}} = 4$$

Määrä nelinkertaistuu.

Omenien hinnan suhde

$$\frac{12{,}0\text{ €}}{3{,}0\text{ €}} = 4$$

Hinta nelinkertaistuu.

Omenien hinta ja määrä ovat suoraan verrannolliset.

**ESIMERKKI 1**

Tutki, ovatko seuraavat suureet suoraan verrannollisia.

**a)**

| Talletettu rahamäärä (€) | Koron suuruus (€) |
|---|---|
| 100 | 2,5 |
| 300 | 7,5 |

**b)**

| Auton nopeus (km/h) | Matkaan käytetty aika (h) |
|---|---|
| 80 | 1,5 |
| 40 | 3,0 |

**RATKAISU**

**a)** Lasketaan ensin talletettujen rahamäärien suhde.

$$\frac{300\ €}{100\ €} = 3$$

Rahamäärien suhteen voi laskea myös toisessa järjestyksessä: $\frac{100\ €}{300\ €} = \frac{1}{3}$.

Lasketaan korkojen suhde.

$$\frac{7{,}5\ €}{2{,}5\ €} = 3$$

Laske korkojen suhde samassa järjestyksessä kuin edellä oleva rahamäärien suhde.

Koska suhteiden arvot ovat yhtä suuret, talletettu rahamäärä ja koron suuruus ovat suoraan verrannolliset.

**b)** Lasketaan auton nopeuksien suhde.

$$\frac{80\ \text{km/h}}{40\ \text{km/h}} = 2$$

Lasketaan matkaan käytettyjen aikojen suhde.

$$\frac{1{,}5\ \text{h}}{3\ \text{h}} = \frac{1}{2}$$

nopeuksien suhde ≠ aikojen suhde
eli
$2 \neq \frac{1}{2}$

Suhteiden arvot eivät ole yhtä suuret, joten nopeus ja aika eivät ole ole suoraan verrannollisia.

**VASTAUS** **a)** ovat **b)** eivät ole

**ESIMERKKI 2**

Lukiolaisten keskuudessa tehdyn tutkimuksen perusteella havaittiin, että matematiikan kokeeseen käytetty valmistautumisaika oli suoraan verrannollinen kokeen pistemäärään. Jos opiskelija valmistautui kokeeseen 2 tuntia, hän sai 12 pistettä. Kuinka kauan opiskelija oli valmistautunut kokeeseen, kun hän sai kokeesta 27 pistettä?

**RATKAISU**

Kootaan tehtävässä annetut tiedot taulukkoon. Merkitään kysyttyä valmistautumisaikaa kirjaimella $x$.

| Valmistautumisaika (h) | Pistemäärä |
|---|---|
| 2 | 12 |
| $x$ | 27 |

- Valmistautumisaikojen suhde: $\frac{2}{x}$
- Pistemäärien suhde: $\frac{12}{27} \overset{(3}{=} \frac{4}{9}$ ← Suhde kannattaa supistaa mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon.

Valmistautumisaika ja pistemäärä ovat suoraan verrannolliset, joten muodostetaan verrantoyhtälö merkitsemällä suhteet yhtä suuriksi.

$$\frac{2}{x} = \frac{4}{9}$$ ← Kerrotaan ristiin.

$$4x = 2 \cdot 9 \qquad | : 4$$

$$x = \frac{18}{4} \overset{(2}{}$$

$$x = \frac{9}{2}$$

$$x = 4\frac{1}{2}$$

**VASTAUS**

Opiskelija oli valmistautunut kokeeseen 4,5 tuntia.

**ESIMERKKI 3**

Liikkuvan auton jarrutusmatka on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön. Jos auto ajaa nopeudella 80 km/h, sen jarrutusmatka on 45 m.

**a)** Kuinka pitkä on jarrutusmatka, kun nopeus on 100 km/h?

**b)** Kuinka suurella nopeudella ajetaan, kun auton jarrutusmatka on 30 m?

**RATKAISU**

**a)** Kootaan annetut tiedot taulukkoon. Merkitään kysyttyä jarrutusmatkaa kirjaimella $x$.

| Jarrutusmatka (m) | Nopeus (km/h) | Nopeus$^2$ (km$^2$/h$^2$) |
|---|---|---|
| 45 | 80 | $80^2$ |
| $x$ | 100 | $100^2$ |

Jarrutusmatka on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\frac{45}{x} = \frac{80^2}{100^2}$$

$$x = 70{,}3125$$

$$x \approx 70 \text{ (m)}$$

Kun nopeus on 100 km/h, jarrutusmatka on 70 m.

**b)** Kootaan annetut tiedot taulukkoon. Merkitään kysyttyä nopeutta kirjaimella $x$.

| Jarrutusmatka (m) | Nopeus (km/h) | Nopeus$^2$ (km$^2$/h$^2$) |
|---|---|---|
| 45 | 80 | $80^2$ |
| 30 | $x$ | $x^2$ |

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\frac{45}{30} = \frac{80^2}{x^2}$$

$x = -65{,}31\ldots$ tai $x = 65{,}31\ldots$ ← Laskin antaa yleensä vastaukseksi tarkan arvon. Ota vastauksesta likiarvo.

Nopeus on positiivinen, joten $x = 65{,}31\ldots$ km/h $\approx$ 65 km/h.

**VASTAUS**

**a)** Jarrutusmatka on 70 m. **b)** Nopeus on 65 km/h.

Jos suureet ovat suoraan verrannolliset, matemaattisen mallin eli riippuvuutta kuvaavan yhtälön muodostamiseksi käytetään kahden suhteen yhtäsuuruutta. Aikaisemmin on tarkasteltu omenien massan ja hinnan välistä riippuvuutta ja todettu niiden olevan suoraan verrannolliset. Muodostetaan malli, jonka avulla omenien hinta saadaan laskettua, kun määrä tiedetään.

Merkintään omenien määrää (kg) kirjaimella $x$ ja hintaa (€) kirjaimella $y$. Valitaan aiemmin esitetystä taulukosta yksi lukupari määrälle ja sitä vastaavalle hinnalle.

| **Omenien määrä (kg)** | **Omenien hinta (€)** |
|---|---|
| 1,5 | 3,0 |
| $x$ | $y$ |

Koska suureet ovat suoraan verrannolliset, määrän ja hinnan suhde on sama. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä $y$.

$$\frac{1{,}5}{x} = \frac{3{,}0}{y}$$

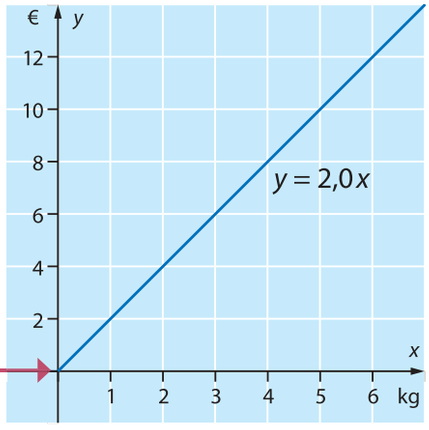
Kerrotaan ristiin.

$$1{,}5y = 3{,}0x \qquad | : 1{,}5$$

$$y = 2{,}0x$$

Omenien määrän $x$ (kg) ja hinnan $y$ (€) välillä on siis voimassa yhtälö $y = 2{,}0x$. Muuttujan $x$ kerrointa kutsutaan **verrannollisuuskertoimeksi**.

Yhtälön $y = 2{,}0x$ avulla voidaan piirtää suureiden välisen riippuvuuden kuvaaja. Jos suureet ovat suoraan verrannolliset, riippuvuuden kuvaaja koordinaatistossa on aina suora.




Hinta ja määrä eivät voi olla negatiivisia, joten kuvaaja alkaa origosta.

**Suoraan verrannollisuus**

Suureet $x$ ja $y$ ovat suoraan verrannollisia, jos toisen suureen muuttuessa toisen suureen arvo muuttuu samaan suuntaan ja samassa suhteessa.

- Tällöin suureiden suhde on vakio eli $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$.
- Suureiden välistä riippuvuutta kuvaa yhtälö $y = kx$, jossa $k$ on verrannollisuuskerroin.
- Riippuvuuden kuvaaja koordinaatistossa on suora.

**ESIMERKKI 4**

Kenenisa Bekele juoksi miesten 10 000 metrin maailmanennätyksen Brysselissä 26.8.2005. Maailmanennätysaika oli 26 minuuttia 17,53 sekuntia. Oletetaan, että hän juoksi matkan tasaisella nopeudella. Tällöin matka ja aika ovat suoraan verrannolliset.

**a)** Kuinka pitkän matkan Bekele juoksi 15 minuutissa?

**b)** Muodosta verrannollisuutta kuvaava yhtälö, kun juoksuun käytettyä aikaa merkitään kirjaimella $x$ ja juostua matkaa merkitään kirjaimella $y$. Mikä on verrannollisuuskerroin? Ilmoita verrannollisuuskerroin yhden desimaalin tarkkuudella.

**c)** Kuvaa riippuvuutta koordinaatistossa. Ratkaise kuvaajan avulla aika, jonka Bekele käytti 3800 metrin juoksemiseen.

**RATKAISU**

**a)** Muutetaan ensin Bekelen juoksuaika minuuteiksi ja kootaan sitten tiedot taulukkoon.

$$26 \text{ min } 17{,}53 \text{ s} = 26 \text{ min} + \frac{17{,}53}{60} \text{ min} = 26{,}29216\ldots \text{ min}$$

Talleta tarkka arvo laskimen muistiin. Tee sijoitus muistipaikkaan samalla kun lasket muunnoksen.

| Aika (min) | Matka (m) |
|---|---|
| 26,29216… | 10 000 |
| 15 | $x$ |

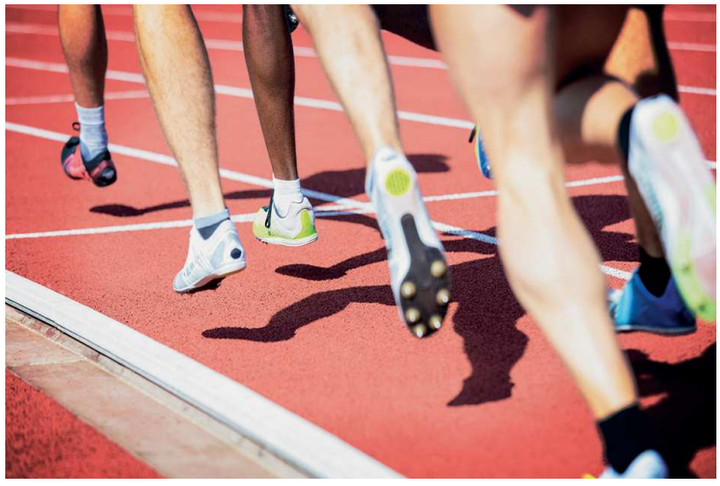
Suureet ovat suoraan verrannolliset, joten muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

Käytä yhtälössä muistipaikkaan tallettamaasi tarkkaa arvoa.

$$\frac{26{,}29216\ldots}{15} = \frac{10000}{x}$$

$$x = 5705{,}12\ldots \approx 5700 \text{ (m)}$$

Bekele juoksi 15 minuutissa 5700 m.



**b)** Merkitään juoksuun käytettyä aikaa kirjaimella $x$ ja juostua matkaa kirjaimella $y$.

| Aika (min) | Matka (m) |
|---|---|
| 26,29216… | 10 000 |
| $x$ | $y$ |

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä $y$.

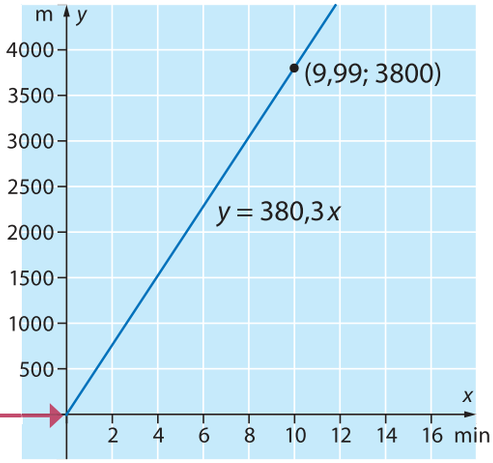
$$\frac{26{,}29216\ldots}{x} = \frac{10\,000}{y}$$

$$y = 380{,}341\ldots x$$

$$y \approx 380{,}3x$$

Verrannollisuutta voidaan kuvata yhtälöllä $y = 380{,}3x$, missä 380,3 on verrannollisuuskerroin.

**c)** Piirretään suoran $y = 380{,}3x$ kuvaaja. Etsitään laskimella kuvaajalta piste, jonka $y$-koordinaatti on 3800.




Aika ja matka eivät voi olla negatiivisia, joten kuvaaja alkaa origosta.

Pisteen $x$-koordinaatti on $x = 9{,}99 \approx 10$, joten 3800 metrin juoksemiseen kuluu aikaa noin 10 minuuttia.

**VASTAUS**

**a)** Bekele juoksi 15 minuutissa 5700 m.
**b)** Verrannollisuutta kuvaa yhtälö $y = 380{,}3x$, missä 380,3 on verrannollisuuskerroin.
**c)** Aikaa kuluu noin 10 min.

# Tehtävät

E1

**231.** Tutki, ovatko $x$ ja $y$ suoraan verrannollisia.

**a)**

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 10 | 8 |
| 15 | 14 |

**b)**

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 5 | 300 |
| 20 | 1200 |

**232.** Suljettu astia sisältää hiilidioksidikaasua. Kun kaasun paine astiassa on 3 baaria, kaasun lämpötila on 75 kelviniä. Kun paine on 2 baaria, lämpötila on 50 kelviniä. Tutki, ovatko paine ja lämpötila suoraan verrannolliset.

**233.** Taulukon suureet $a$ ja $b$ ovat suoraan verrannolliset. Ratkaise $x$.

| $a$ | $b$ |
|---|---|
| $3x$ | 5 |
| $x + 4$ | 2 |

E2

**234.** Mobiilipelissä pisteitä kertyi sen mukaan, kuinka kauan pelissä oli pysynyt mukana. Kertynyt pistemäärä oli suoraan verrannollinen peliaikaan. Kun Nella oli pelannut peliä 15 minuuttia, hänelle oli kertynyt 300 pistettä. Kuinka kauan Nellan pitäisi vielä pelata, jotta hänen pistemääränsä olisi 500 pistettä?

**235.** Neljän ruokailijan pastakastikkeeseen tarvitaan 300 grammaa jauhelihaa.

**a)** Kuinka paljon jauhelihaa tarvitaan kuuden ruokailijan pastakastikkeeseen?

**b)** Tinolla on 1,0 kg jauhelihaa. Pystyykö hän valmistamaan pastakastikkeen 14 henkilölle?

---

**236.** Erään kilpikonnalajin kuoren paksuus on suoraan verrannollinen kilpikonnan ikään. Kun kilpikonnan kuori on 3,5 cm paksu, kilpikonnan ikä on 70 vuotta. Minkä ikäisen kilpikonnan kuoren paksuus on 2,5 cm?

**237.** Julian koulumatkan pituus on 5,8 km. Skootterilla koulumatkaan kuluu aikaa 10 minuuttia. Julian kotoa on kirjastoon matkaa 9,2 km. Kuinka kauan matka kirjastoon kestää skootterilla, jos oletetaan, että keskinopeus on sama kuin koulumatkalla?

**238.** Ollin grillijuhliin on tulossa 14 ystävää. Juhlia varten Olli varaa 4,8 kg grillimakkaraa. Olli päättää kutsua juhliin lisäksi kolme naapuria. Kuinka paljon Ollin täytyy nyt varata makkaraa, kun jokaisen vieraan oletetaan syövän yhtä paljon?

**239.** Helsingin ja Kuopion välisen junamatkan pituus on noin 450 km. Junamatka Helsingistä Kuopioon kestää 4 h 45 min. Oletetaan, että junat ajavat samalla keskinopeudella kaikki matkat.

**a)** Helsingin ja Tampereen välisen junamatkan pituus on noin 200 km. Kuinka kauan kestää junamatka Helsingistä Tampereelle?

**b)** Helsingin ja Oulun välinen junamatka kestää noin 6 h 25 min. Laske junamatkan pituus kilometrin tarkkuudella.

**240.** Arvo harjoittelee 5000 metrin juoksua. Valmentaja ottaa harjoituksissa väliaikoja. Juostu matka ja siihen käytetty aika ovat suoraan verrannollisia, jos juostaan koko ajan samalla nopeudella. Oletetaan, että Arvo juoksee koko 5000 metriä samalla nopeudella.

**a)** Mikä on Arvon aika 5000 metrillä, jos väliaika on 100 metrin kohdalla 35,0 sekuntia?

**b)** Kuinka pitkän matkan Arvo juoksee 12 ensimmäisen minuutin aikana, jos hänen loppuaikansa 5000 metrin juoksussa on 33 min 20 s?

**241.** Yrityksen pikkujouluihin on ennakkoilmoittautumisten perusteella varattu 60 litraa glögiä. Pikkujouluihin saapuu kuitenkin 30 henkilöä vähemmän kuin mitä oli ennakkoon ilmoittautunut. Tällöin glögiä kuluu 48 litraa. Muodosta tilanteesta verranto ja ratkaise sen avulla, kuinka monta henkilöä oli alun perin ilmoittautunut pikkujouluihin. Oletetaan, että jokainen henkilö nauttii yhtä paljon glögiä.

E3

**242.** Heilurin heilahdusajan neliö on suoraan verrannollinen heiluri pituuteen. Pituuden ollessa 51,0 cm heilahdusaika on 1,5 s.

**a)** Kuinka pitkä on heilahdusaika, jos heilurin pituus on 80,0 cm?

**b)** Laske heilurin pituus, kun sen heilahdusaika on 2,5 sekuntia.

**243.** Kaarteessa auton normaalikiihtyvyys on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön kaaren säteen (kaarevuussäde) pysyessä samana. Kolme autoa ajaa samaan kaarteeseen eri nopeuksilla. Ensimmäisen auton nopeus on 60 km/h ja normaalikiihtyvyys 2,76 $m/s^2$.

**a)** Kuinka suuri on toisen auton nopeus, kun auton normaalikiihtyvyys on 4,91 $m/s^2$?

**b)** Kuinka monta prosenttia suurempi on kolmannen auton normaalikiihtyvyys ensimmäisen auton normaalikiihtyvyyteen verrattuna, kun kolmannen auton nopeus on 92 km/h?

**244.** Kappaleen liike-energia on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön. Kun kappaleen nopeus on 5,0 m/s, sen liike-energian määrä on 500 joulea.

**a)** Laske kappaleen liike-energian määrä, kun kappaleen nopeus on 8,0 m/s.

**b)** Laske kappaleen nopeus, kun sen liike-energian määrä on 1800 joulea.

E4

**245.** Kappaleen paino on suoraan verrannollinen putoamiskiihtyvyyteen. Maassa putoamiskiihtyvyys on 9,8 $m/s^2$. Nean paino Maassa on 620 newtonia.

**a)** Mikä olisi Nean paino Kuussa, kun putoamiskiihtyvyys Kuussa on 1,6 $m/s^2$?

**b)** Laske putoamiskiihtyvyys Jupiterissa, kun Nean paino Jupiterissa on 1640 newtonia.

**c)** Muodosta verrannollisuutta kuvaava yhtälö, kun putoamiskiihtyvyyttä merkitään kirjaimella $x$ ja painoa kirjaimella $y$. Mikä on verrannollisuuskerroin? Anna verrannollisuuskerroin yhden desimaalin tarkkuudella.

**d)** Kuvaa riippuvuutta koordinaatistossa. Ratkaise kuvaajan avulla Nean paino Marsissa, kun putoamiskiihtyvyys Marsissa on 3,7 $m/s^2$.

**246.** Metallien tilavuus kasvaa lämpötilan noustessa. Pariisissa sijaitseva Eiffel-torni on valmistettu takoraudasta. Tornin pituus muuttuu 6,20 senttimetriä, kun lämpötilan muutos on 15,0 °C. Pituuden muutos on suoraan verrannollinen lämpötilan muutokseen.

**a)** Kuinka paljon Eiffel-tornin pituus muuttuu, jos lämpötilan muutos on 26,0 °C?

**b)** Muodosta verrannollisuutta kuvaava yhtälö, kun lämpötilan muutosta asteina merkitään kirjaimella $x$ ja pituuden muutosta senttimetreinä kirjaimella $y$.

**c)** Kuvaa riippuvuutta koordinaatistossa. Ratkaise kuvaajan avulla, kuinka suuri tulisi lämpötilan muutoksen olla, jotta Eiffel-tornin pituus muuttuisi 20 cm.

## Sekalaisia

**247.** Suureet $x$ ja $y$ ovat suoraan verrannolliset. Kun $x = 2$, on $y = 5$. Mikä on suureen $y$ arvo, kun $x = 7$? [K2009, 2a]

**248.** Kauppias havaitsi, että hänen mainontaan käyttämänsä rahamäärä oli suoraan verrannollinen myynnin euromääräiseen kasvuun. Kun kauppias käytti mainontaan 600 €, myynti lisääntyi 1800 eurolla.

**a)** Kuinka paljon myynti lisääntyisi, jos kauppias käyttäisi mainontaan 800 euroa?

**b)** Kuinka paljon mainontaan pitäisi käyttää, jotta myynti lisääntyisi 3000 eurolla?

---

**249.** Vuonna 2016 Helsingin keskustassa sijaitseva 63 $m^2$:n kaksio maksoi 310 000 €.

**a)** Kuinka suuren asunnon saisi 120 000 eurolla, jos neliöhinta olisi sama?

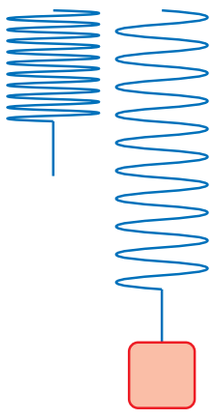
**b)** Kuinka paljon maksaisi 75 $m^2$:n kolmio, jos neliöhinta pysyisi samana?

**250.** Sähkölaitteen teho on suoraan verrannollinen sähkövirran voimakkuuden neliöön. Kun sähkövirran voimakkuus on 0,20 ampeeria, sähkölaitteen teho on 10,0 wattia.

**a)** Laske sähkölaitteen teho, kun sähkövirran voimakkuus on 0,50 ampeeria.

**b)** Kuinka suuri on sähkövirta, kun sähkölaitteen teho on 360 wattia?

**251.** Kun jousen päähän ripustetaan roikkumaan punnus, jousen pituus kasvaa. Tätä jousen pituuden muutosta kutsutaan venymäksi. Jousen venymä on suoraan verrannollinen punnuksen massaan. Kun jouseen ripustetaan punnus, jonka massa on 60 g, jousen venymä on 0,80 cm.



**a)** Kuinka painava punnus jouseen on ripustettu, jos jousen venymä on 1,7 cm? Anna vastaus gramman tarkkuudella.

**b)** Muodosta verrannollisuutta kuvaava yhtälö, kun jousen venymää senttimetreinä merkitään kirjaimella $x$ ja punnuksen massaa grammoina kirjaimella $y$.

**c)** Kuvaa riippuvuutta koordinaatistossa. Ratkaise kuvaajan avulla jousen venymä silloin, kun punnuksen massa on 230 grammaa. Anna vastaus millimetrin tarkkuudella.

# 4.3 Kääntäen verrannollisuus

**Pohdinta**

Henkilö kävelee päivittäin työmatkansa.

**a)** Päättele puuttuvat tiedot.

| Nopeus $v$ (m/min) | Aika $t$ (min) |
|---|---|
| 200 | 20 |
| 100 | 40 |
| 50 | |
| | 160 |

**b)** Laske nopeuksien ja aikojen tulo. Mitä havaitset?

| Nopeus $v$ (m/min) | Aika $t$ (min) | $v \cdot t$ |
|---|---|---|
| 200 | 20 | |
| 100 | 40 | |
| 50 | | |
| | 160 | |

**c)** Mikä on työmatkan pituus?

**d)** Muodosta yhtälö taulukon tietojen avulla ja ratkaise yhtälöstä $y$.

| Nopeus $v$ (m/min) | Aika $t$ (min) | $v \cdot t$ |
|---|---|---|
| 200 | 20 | |
| $y$ | $x$ | |

**e)** Piirrä edellisessä kohdassa saadun riippuvuuden kuvaaja. Millainen kuvaaja on?

Kun kuljetaan vakiomatka, esimerkiksi 100 km, matkaan kulunut aika riippuu nopeudesta. Jos matka kuljetaan mopolla ja keskinopeus on 40 km/h, aikaa kuluu matkaan 2,5 tuntia eli 150 minuuttia. Jos sama matka ajetaan autolla ja keskinopeus on 80 km/h, aikaa kuluu vain 1,25 tuntia eli 75 minuuttia. Kun nopeus kaksinkertaistuu, matka-aika puolittuu.

| **Nopeus *v*<br>(km/h)** | **Aika<br>(h)** |
|---|---|
| 40 | 2,5 |
| 80 | 1,25 |

Vakiomatkalla nopeus ja aika ovat **kääntäen verrannollisia suureita**. Toisen suureen kasvaessa toinen pienenee samassa suhteessa.

- Kahden nopeuden suhde on $\frac{80}{40} = \frac{2}{1}$.
- Vastaavien aikojen suhde on $\frac{1{,}25}{2{,}5} = \frac{1}{2}$.

Suhteet eivät ole yhtä suuret, vaan ne ovat toistensa **käänteislukuja**. Nopeuden ja ajan tuloksi saadaan aina sama luku, joka on kuljetun matkan pituus 100 km.

| **Nopeus<br>(km/h)** | **Aika<br>(h)** | **Nopeus · aika** |
|---|---|---|
| 40 | 2,5 | $40 \cdot 2{,}5 = 100$ |
| 80 | 1,25 | $80 \cdot 1{,}25 = 100$ |

Kääntäen verrannollisten suureiden tulo on aina vakio. Kun suureet ovat kääntäen verrannolliset, riippuvuutta kuvaava yhtälö voidaan muodostaa tulon avulla.

Juna kulkee saman 100 km:n matkan nopeudella 200 km/h. Jos halutaan laskea matkaan käytetty aika $x$, voidaan edetä seuraavasti:

❶ Muodostetaan kaksi tuloa esimerkiksi taulukkoa apuna käyttäen.

| Nopeus (km/h) | Aika (h) | Nopeus · aika |
|---|---|---|
| 80 | 1,25 | $80 \cdot 1{,}25 = 100$ |
| 200 | $x$ | $200x$ |

❷ Merkitään tulot yhtä suuriksi.

$$200x = 100$$

❸ Ratkaistaan yhtälö.

$$200x = 100 \qquad | : 200$$
$$x = 0{,}5$$

Nopeudella 200 km/h matka-aika on 0,5 tuntia eli 30 minuuttia.

Matkaan käytetty aika on nopeuden funktio. Merkitään nopeutta kirjaimella $x$ ja aikaa kirjaimella $y$.

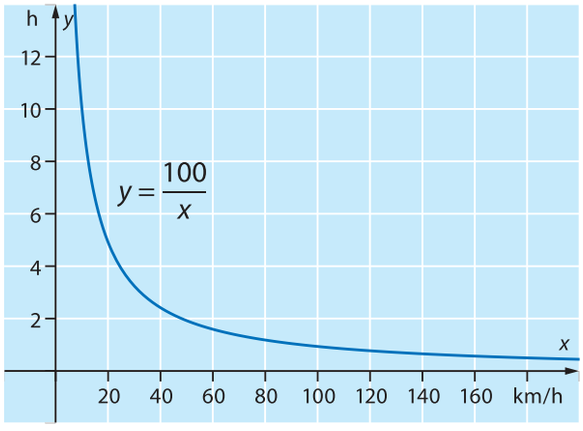
| Nopeus (km/h) | Aika (h) | Nopeus · aika |
|---|---|---|
| 40 | 2,5 | $40 \cdot 2{,}5 = 100$ |
| $x$ | $y$ | $x \cdot y$ |

Muodostetaan yhtälö merkitsemällä nämä kaksi tuloa yhtä suuriksi ja ratkaistaan yhtälöstä $y$.

$$xy = 100 \qquad | : x$$
$$y = \frac{100}{x} = 100 \cdot \frac{1}{x}$$

Lukua 100 sanotaan **verrannollisuuskertoimeksi**.

Ajan ja nopeuden välistä riippuvuutta voidaan havainnollistaa myös koordinaatistossa. Riippuvuuden kuvaaja on käyrä, jota sanotaan **hyperbeliksi**.




### Kääntäen verrannollisuus

Suureet $x$ ja $y$ ovat kääntäen verrannollisia, jos toisen suureen kasvaessa toisen suureen arvo pienenee samassa suhteessa.

- Tällöin suureiden tulo on vakio eli $x_1 y_1 = x_2 y_2$.
- Suureiden välistä riippuvuutta kuvaa yhtälö $y = k \cdot \frac{1}{x}$, jossa $k$ on verrannollisuuskerroin.
- Riippuvuuden kuvaaja koordinaatistossa on hyperbeli.

**ESIMERKKI 1**

Suureet $x$ ja $y$ ovat kääntäen verrannolliset. Jos $x = 10$, niin $y = 4$. Mikä on suureen $y$ arvo, kun $x = 15$?

**RATKAISU**

Kootaan arvot taulukkoon.

**Tapa 1** Muodostetaan suureiden tulot.

| $x$ | $y$ | $x \cdot y$ |
|---|---|---|
| 10 | 4 | $10 \cdot 4 = 40$ |
| 15 | $y$ | $15y$ |

Merkitään tulot yhtä suuriksi ja ratkaistaan yhtälöstä $y$.

$$15y = 40 \qquad |:15$$

$$y = \frac{40^{(5}}{15} = \frac{8}{3}$$

**Tapa 2** Muodostetaan suureiden suhteet.

| | $x$ | $y$ |
|---|---|---|
| | 10 | 4 |
| | 15 | $y$ |
| **Suhde** | $\frac{10}{15}$ | $\frac{4}{y}$ |

Suhteet ovat toistensa käänteislukuja. Jotta suhteet olisivat yhtä suuret, pitää toinen suhteista kirjoittaa käänteislukuna. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se kertomalla ristiin.

Ennen ristiin kertomista kannattaa supistaa, jos se on mahdollista.

$$\frac{10^{(5}}{15} = \frac{y}{4}$$

Suhteen $\frac{4}{y}$ käänteisluku on $\frac{y}{4}$.

$$\frac{2}{3} = \frac{y}{4}$$

$$3y = 8 \qquad |:3$$

$$y = \frac{8}{3}$$

**VASTAUS** $\frac{8}{3}$

**ESIMERKKI 2**

Liuoksen laimennuksessa liuoksen konsentraatio ja liuoksen kokonaistilavuus ovat kääntäen verrannollisia. NaCl-liuoksen konsentraatio on 2 mol/l. Liuoksesta pipetoidaan 10 ml ja sekoitetaan joukkoon vettä siten, että laimennetun liuoksen tilavuudeksi saadaan 50 ml. Mikä on laimennetun liuoksen konsentraatio?

**RATKAISU**

Kootaan tiedot taulukkoon.

| | Tilavuus (ml) | Konsentraatio (mol/l) | Tilavuus · konsentraatio |
|---|---|---|---|
| **Laimentamaton liuos** | 10 | 2 | $10 \cdot 2 = 20$ |
| **Laimennettu liuos** | 50 | $x$ | $50x$ |

Tilavuus ja konsentraatio ovat kääntäen verrannollisia. Merkitään niiden tulot yhtä suuriksi ja ratkaistaan yhtälöstä $x$.

$$50x = 20 \qquad | : 50$$

$$x = \frac{20}{50}$$

$$x = \frac{2}{5}$$

$$x = 0{,}4$$

Laimennetun liuoksen konsentraatio on 0,4 mol/l.

**VASTAUS**

0,4 mol/l

**ESIMERKKI 3**

Kaasun paine $y$ (bar) on vakiolämpötilassa kääntäen verrannollinen kaasun tilavuuteen $x$ (dm$^3$). Männällä varustetussa sylinterissä tutkittiin tätä riippuvuutta. Paine riippui tilavuudesta seuraavasti:

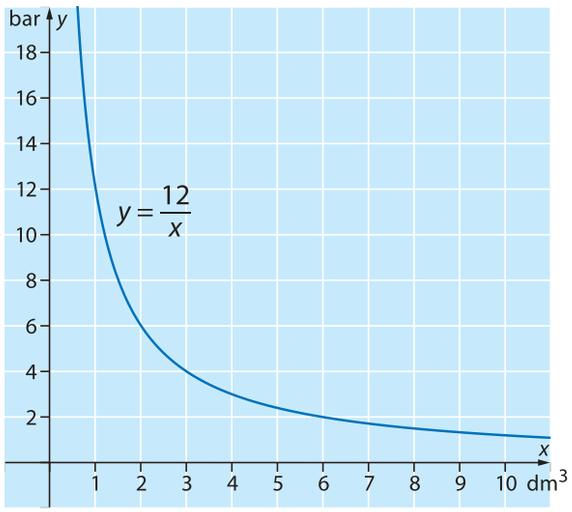
$$y = \frac{12}{x}, \quad x > 0.$$

**a)** Piirrä laskimen avulla riippuvuuden kuvaaja.
**b)** Päättele kuvaajasta, kuinka suuri on paine, kun tilavuus on 5,0 dm$^3$.
**c)** Päättele kuvaajasta tilavuus, jossa paine on 4,0 bar.

**RATKAISU**

**a)** Riippuvuutta kuvaava käyrä on hyperbeli.

Koska alkuehdon mukaan $x > 0$, käyrän toisen osan voi jättää piirtämättä (sijaitsee koordinaatiston 3. neljänneksessä).

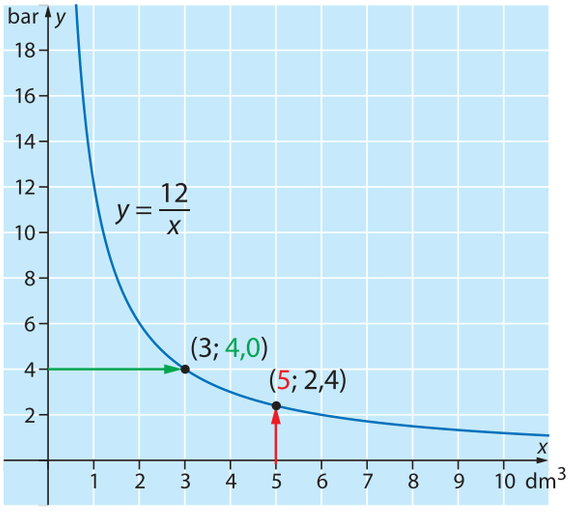



**b)** Kun $x$-koordinaatti on 5, käyrän $y$-koordinaatti on 2,4.

Paine on siis 2,4 bar.

**c)** Etsitään käyrältä piste, jossa $y = 4{,}0$. Tässä pisteessä $x$-koordinaatti saa arvon 3.

Tilavuus on siis 3,0 dm$^3$.




**VASTAUS** **b)** 2,4 bar **c)** 3,0 dm$^3$

**ESIMERKKI 4**

Suomen ensimmäinen kiihdytysajokilpailu ajettiin Keimolassa vuonna 1975. Nopeimman ajan 11,16 s ajoi Jorma Päivärinta Kawasaki 750 -moottoripyörällä. Moottoripyörän kiihtyvyys oli 6,5 $\text{m/s}^2$. Jos oletetaan, että moottoripyörän liike on tasaisesti kiihtyvää, kiihtyvyys on kääntäen verrannollinen ajan neliöön.

**a)** Nopeinta katurekisterissä olevaa autoa ohjasi Urpo Lahtinen. Auto käytti samaan matkaan aikaa 14,42 s. Mikä oli auton kiihtyvyys?

**b)** Formula 1 -auton kiihtyvyys on 14,2 $\text{m/s}^2$. Kuinka kauan Formula 1 -autolta kuluisi aikaa saman radan ajamiseen?

**RATKAISU**

**a)** Kootaan tiedot taulukkoon. Kiihtyvyyden ja ajan lisäksi taulukkoon merkitään myös ajan neliöt eli ajan toiset potenssit.

| Kiihtyvyys ($\text{m/s}^2$) | Aika (s) | Ajan neliö ($\text{s}^2$) |
|---|---|---|
| 6,5 | 11,16 | $11{,}16^2$ |
| $x$ | 14,42 | $14{,}42^2$ |

Koska kiihtyvyys on kääntäen verrannollinen ajan neliöön, muodostetaan suureiden tulot ja merkitään ne yhtä suuriksi.

$$14{,}42^2\, x = 11{,}16^2 \cdot 6{,}5$$

$$x = 4{,}014\ldots \approx 4{,}0$$

Auton kiihtyvyys oli 4,0 $\text{m/s}^2$.

**b)** Merkitään aikaa kirjaimella $y$, kun kiihtyvyys on 14,2 $\text{m/s}^2$.

| Kiihtyvyys ($\text{m/s}^2$) | Aika (s) | Ajan neliö ($\text{s}^2$) |
|---|---|---|
| 6,5 | 11,16 | $11{,}16^2$ |
| 14,2 | $y$ | $y^2$ |

Merkitään tulot yhtä suuriksi ja ratkaistaan yhtälö.

$$14{,}2 \cdot y^2 = 6{,}5 \cdot 11{,}16^2$$

$$y = \pm 7{,}550\ldots \approx \pm 7{,}6$$

Aikaa kuluisi 7,6 s.

Koska (tässä tehtävässä) aika ei voi olla negatiivinen luku, ratkaisuksi kelpaa vain $x \approx 7{,}6$.

**VASTAUS**

**a)** 4,0 $\text{m/s}^2$ **b)** 7,6 s

# Tehtävät

E1

**252.** Suureet $x$ ja $y$ ovat kääntäen verrannolliset. Jos $x = 2$, niin $y = 3$. Mikä on $y$:n arvo, kun $x = 5$? [S2008, 3b]

**253.** Suureet $a$ ja $b$ ovat kääntäen verrannolliset. Kun suureen $a$ arvo kasvaa arvosta 3 arvoon 5, suureen $b$ arvo laskee neljällä. Määritä $b$.

**254.** Suureet $a$ ja $b$ ovat kääntäen verrannolliset. Muodosta taulukon avulla yhtälö ja ratkaise $x$.

| $a$ | $b$ |
|---|---|
| $x + 1$ | 3 |
| 9 | $x - 5$ |

E2

**255.** Alisa kävelee kotoa kouluun nopeudella 5,0 km/h, jolloin koulumatkaan kuluu aikaa 30 minuuttia. Iltapäivällä hän kävelee nopeudella 3,0 km/h. Kuinka kauan aikaa matkaan kuluu, kun aika ja nopeus ovat kääntäen verrannollisia?

**256.** Talon ulkoseinien maalaamiseen kuluu aikaa 10 tuntia, kun tehtävään on palkattu neljä maalaria. Kuinka kauan aikaa viideltä maalarilta olisi samaan tehtävään kulunut?

---

**257.** Koruseppä valmistaa koruja erilaisista metalleista. Hän saa korujen valmistamiseen käyttämänsä metallit levyinä, joiden massa on aina sama. Hopeasta valmistetun levyn tilavuus on 95 $\text{cm}^3$. Metallilevyn tiheys on kääntäen verrannollinen levyn tilavuuteen. Laske kultalevyn tilavuus, kun hopean tiheys on 10,49 $\text{g/cm}^3$ ja kullan tiheys 19,32 $\text{g/cm}^3$.

E3

**258.** Paine $y$ (pascalia) on kääntäen verrannollinen pinta-alaan $x$ ($\text{m}^2$), johon voima kohdistuu. Kokeessa tutkittiin tätä riippuvuutta kohdistamalla vakiovoima erilaisiin aloihin. Suureiden $x$ ja $y$ välinen riippuvuus voitiin esittää seuraavan yhtälön avulla:

$$y = \frac{140}{x}, \quad x > 0.$$

**a)** Piirrä laskimen avulla riippuvuutta esittävän yhtälön kuvaaja.

**b)** Päättele kuvaajasta, kuinka suuri paine on, jos pinta-ala on 400 $\text{cm}^2$.

**c)** Päättele kuvaajasta pinta-ala, kun paine on 7000 pascalia.

**259.** Suure $y$ on kääntäen verrannollinen suureeseen $x$. Suure $y$ riippuu suureesta $x$ ($x > 0$) seuraavasti:

$$y = \frac{c}{x}, \quad \text{jossa } c \text{ on verrannollisuuskerroin.}$$

Riippuvuutta havainnollistavan käyrän kuvaaja kulkee pisteen (4, 6) kautta.

**a)** Määritä verrannollisuuskerroin $c$.

**b)** Piirrä laskimen avulla käyrän kuvaaja.

**c)** Päättele kuvaajan avulla, millä muuttujan $x$ arvolla $y = 300$.

**260.** Ajettaessa vakiomatkaa eri nopeuksilla saatiin matka-ajoiksi seuraavat tulokset:

| Nopeus $x$ (km/h) | Aika $y$ (h) |
|---|---|
| 140 | 3,5 |
| 200 | 2,45 |
| 250 | 1,96 |

**a)** Päättele taulukon avulla verrannollisuuskerroin $c$, kun nopeus ja aika ovat kääntäen verrannollisia.

**b)** Muodosta yhtälö nopeuden $x$ ja ajan $y$ väliselle riippuvuudelle.

**c)** Mallinna riippuvuutta koordinaatistossa.

E4

**261.** Vakiomatkalla kappaleen kiihtyvyys $y$ (m/s$^2$) on kääntäen verrannollinen ajan $x$ (s) neliöön. Kun kappale kulkee matkan 20 sekunnissa, sen kiihtyvyys on 5,0 m/s$^2$.

**a)** Kuinka suuri on kappaleen kiihtyvyys, jos matkaan kuluu aikaa 25 s?

**b)** Kuinka kauan matkaan kuluu aikaa, jos kiihtyvyys on 8,0 m/s$^2$?

**262.** Tietokonepelissä ammutaan laseraseella avaruusolioita. Jos pelaajan roolihahmo on 10 metrin päässä avaruusoliosta, hän osuu olioon todennäköisyydellä 0,8. Todennäköisyys osua olioon on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön. Millä todennäköisyydellä pelaajan roolihahmo osuu avaruusolioon, kun roolihahmo on 25 metrin päässä oliosta?

**263.** Kappaleen paino on kääntäen verrannollinen maapallon keskipisteestä mitatun etäisyyden neliöön. Lentokone painaa maan pinnalla 56,0 tonnia. Kuinka paljon se painaa kymmenen kilometrin korkeudessa? Maan pinnan etäisyys keskipisteestä on 6370 kilometriä. [K2006, 4]

**264.** Äänilähteen tuottaman äänen intensiteetti on kääntäen verrannollinen äänilähteen etäisyyden neliöön. Festareilla Miisa on aluksi 50 metrin päässä orkesterista, mutta siirtyi sitten 15 metrin päähän orkesterista. Kuinka monta prosenttia kasvoi äänen intensiteetti? [K2008, 6]

## Sekalaisia

**265.** Suure $a$ on kääntäen verrannollinen suureen $b$ neliöön. Määritä taulukon tietojen avulla $x$ ($x > 0$).

| $a$ | $b$ |
|---|---|
| 2 | 5 |
| 10 | $x$ |

**266.** Oppilaskunta kerää varoja koulun stipendirahastoon myymällä joulukoristeita. Tavoitteena on myydä 1500 koristetta. Jos koristeiden valmistamiseen osallistuu 100 opiskelijaa, tarvittava määrä saadaan valmistettua 12 tunnissa. Kuinka kauan aikaa koristeiden valmistamiseen kuluu, kun koristeita valmistaa 160 opiskelijaa? Koristeiden valmistukseen käytetty aika ja opiskelijoiden määrä ovat kääntäen verrannollisia.

**267.** Yrityksen teettämässä työhyvinvointikyselyssä jokainen työntekijä arvioi työpaikkaviihtyvyyttä asteikolla 1–10. Tuloksista laskettiin keskiarvo (”viihtyvyysindeksi”). Työnantaja laski myös sairauspoissaolot vuoden ajalta. Usean vuoden seurannassa todettiin, että sairauspoissaolojen määrä oli kääntäen verrannollinen työpaikkaviihtyvyyttä kuvaavan luvun neliöön. Vuonna 2014 sairauspoissaoloja oli yhteensä 1260 tuntia. Samana vuonna viihtyvyysindeksi oli 7,8. Seuraavana vuonna viihtyvyysindeksin arvo oli 8,4. Laske tämän perusteella vuoden 2015 sairauspoissaolojen määrä.

**268.** Ajettaessa vakionopeudella $v$ (m/s) auton jarrutusmatka $y$ (m) on kääntäen verrannollinen kitkakertoimeen $x$. Jarrutusmatkan ja kitkakertoimen välistä riippuvuutta esittää yhtälö

$$y = \frac{v^2}{19{,}62} \cdot \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Olkoon auton nopeus 100 km/h eli $v = 27{,}77$ (m/s).

**a)** Piirrä riippuvuutta esittävän yhtälön kuvaaja laskimen avulla.

**b)** Määritä kuvaajasta jarrutusmatka kuivalla asfaltilla, missä kitkakerroin on 0,80.

**c)** Päättele kuvaajasta kuivan jään kitkakerroin, kun jarrutusmatka on 262 m.

# 5 Lisämateriaali

## 5.1 Murtolausekkeita

Polynomit ovat summamuotoisia lausekkeita, joissa ei esiinny muuttujakirjainta nimittäjässä. Esimerkiksi lausekkeet

- $P(x) = x^2$
- $R(x) = x - 2$

ovat polynomeja. Näiden kahden polynomin summa, erotus ja tulo ovat edelleen polynomeja. Sen sijaan osamäärä

$$\frac{P(x)}{R(x)} = \frac{x^2}{x-2}$$

(osoittaja: $x^2$; nimittäjä: $x-2$)

ei ole polynomi, koska lauseke ei supistu polynomiksi, vaan nimittäjään jää muuttuja $x$. Osamäärää sanotaan **rationaali- tai murtolausekkeeksi**.

Jakolaskua ei voi laskea, jos jakajana on luku 0. Tästä syystä murtolausekkeiden arvoa ei aina voi laskea kaikilla muuttujan arvoilla. Kun huomioidaan, ettei murtolausekkeen nimittäjä voi olla 0, saadaan murtolausekkeen **määrittelyehto** $R(x) \neq 0$. Niitä muuttujan arvoja, joilla määrittelyehto toteutuu, kutsutaan murtolausekkeen **määrittelyjoukoksi**.

Esimerkiksi murtolausekkeen $\frac{x^2}{x-2}$ määrittelyjoukko on

$$x - 2 \neq 0$$
$$x \neq 2$$

Huomaa, että esimerkiksi potenssilausekkeet $x^{-1}$ ja $x^{-3}$ eivät ole polynomeja vaan murtolausekkeita, koska

$x^{-1} = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

$x^{-3} = \frac{1}{x^3}$, $x \neq 0$

### Murtolauseke

Murtolauseke on muotoa

$$\frac{P(x)}{R(x)},\ R(x) \neq 0$$

- $P(x)$ ja $R(x)$ ovat polynomeja.

Murtolausekkeiden sieventämisessä sovelletaan murtolukujen laskusääntöjä.

- Murtolausekkeita voidaan laskea yhteen ja vähentää toisistaan vain, jos lausekkeilla on sama nimittäjä. Tarvittaessa lausekkeet on lavennettava (tai supistettava) samannimisiksi.

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$$

- Murtolausekkeita kerrottaessa osoittajat kerrotaan keskenään ja nimittäjät keskenään.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

- Murtolausekkeiden jakolasku muutetaan kertolaskuksi.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Murtoluvut esitetään yleensä **supistettuna** yksinkertaisimpaan muotoonsa. Supistamisessa sekä osoittaja että nimittäjä jaetaan samalla luvulla, joka on sekä osoittajan että nimittäjän **yhteinen tekijä**.

$$\frac{a \cdot \overset{(c}{c}}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$$

Jos lauseke voidaan **jakaa tekijöihin**, yhteinen tekijä voidaan vastaavalla tavalla supistaa. Tekijöihin jakamisessa käytetään usein hyväksi osittelulakia.

$$\frac{ab + ac}{a} = \frac{a(b+c)}{a} \overset{(a}{=} \frac{b+c}{1} = b + c$$

Osittelulain mukaan $a(b+c) = ab + ac$. Erotetaan yhteiseksi tekijäksi $a$.

Kun osoittaja on tulomuodossa $a(b+c)$, voidaan yhteinen tekijä $a$ supistaa.

Lausekkeen sieventämiseksi myös nimittäjä joudutaan joskus jakamaan tekijöihin.

**ESIMERKKI 1**

Sievennä lauseke supistamalla yhteinen tekijä.

a) $\dfrac{15x+25}{5}$ b) $\dfrac{6x+2}{12x}$ c) $\dfrac{2x+8}{3x+12}$

**RATKAISU**

a) $\dfrac{15x+25}{5} = \dfrac{5\cdot 3x+5\cdot 5}{5} = \dfrac{5(3x+5)}{5} = \dfrac{3x+5}{1} = 3x+5$

Osoittajasta voidaan erottaa luku 5 yhteiseksi tekijäksi.

b) $\dfrac{6x+2}{12x} = \dfrac{2\cdot 3x+2\cdot 1}{2\cdot 6x} = \dfrac{2(3x+1)}{2\cdot 6x} = \dfrac{3x+1}{6x}$

Osoittajalla ja nimittäjällä on yhteisenä tekijänä luku 2.

c) $\dfrac{2x+8}{3x+12} = \dfrac{2\cdot x+2\cdot 4}{3\cdot x+3\cdot 4} = \dfrac{2(x+4)}{3(x+4)} = \dfrac{2}{3}$

Osoittajalla ja nimittäjällä on yhteisenä tekijänä $x+4$.

**VASTAUS**

a) $3x+5$ b) $\dfrac{3x+1}{6x}$ c) $\dfrac{2}{3}$

---

**ESIMERKKI 2**

Sievennä lauseke.

a) $\dfrac{x}{x+1} - \dfrac{x+2}{x+1}$ b) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{x-2}{x+2}$

**RATKAISU**

a) Lausekkeilla on sama nimittäjä, joten vähennetään osoittajat toisistaan ja merkitään nimittäjäksi lauseke $x+1$.

$$\frac{x}{x+1} - \frac{x+2}{x+1} = \frac{x-(x+2)}{x+1}$$

Merkitse vähennettävä sulkuihin.

$$= \frac{x-x-2}{x+1}$$

Sulkuja poistettaessa termien etumerkit vaihtuvat.

$$= \frac{-2}{x+1}$$

$$= -\frac{2}{x+1}$$

**b)** Jotta lauseketta voitaisiin sieventää, nimittäjät on lavennettava samannimisiksi.

$$\overset{x+2)}{\frac{2}{x}} + \overset{x)}{\frac{x-2}{x+2}} = \frac{2(x+2)}{x(x+2)} + \frac{x(x-2)}{x(x+2)}$$

Lisää sulut kerrottavien polynomien ympärille.

$$= \frac{2x+4+x^2-2x}{x^2+2x}$$

$$= \frac{x^2+4}{x^2+2x}$$

**VASTAUS** **a)** $-\frac{2}{x+1}$ **b)** $\frac{x^2+4}{x^2+2x}$

---

**ESIMERKKI 3**

Sievennä lauseke.

**a)** $\frac{5}{3x} \cdot \frac{x}{15}$ **b)** $\frac{2}{x^2} : \frac{4}{3x}$

**RATKAISU**

**a)** Kerrotaan osoittajat keskenään ja nimittäjät keskenään. Kirjoitetaan tulot yhdelle jakoviivalle ja supistetaan.

$$\frac{5}{3x} \cdot \frac{x}{15} = \frac{\overset{1}{\cancel{5}} \cdot \overset{1}{\cancel{x}}}{3\underset{1}{\cancel{x}} \cdot \underset{3}{\cancel{15}}} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 3} = \frac{1}{9}$$

**b)** Muutetaan jakolasku ensin kertolaskuksi ja supistetaan.

$$\frac{2}{x^2} : \frac{4}{3x} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}}{\underset{x}{\cancel{x^2}}} \cdot \frac{3\overset{1}{\cancel{x}}}{\underset{2}{\cancel{4}}} = \frac{1 \cdot 3}{x \cdot 2} = \frac{3}{2x}$$

**VASTAUS** **a)** $\frac{1}{9}$ **b)** $\frac{3}{2x}$

---

# Tehtävät

**269.** Sievennä.

a) $\dfrac{8x+4}{2}$ b) $\dfrac{15-3x}{3}$ c) $\dfrac{6x^2-12}{4}$

E1

**270.** Sievennä.

a) $\dfrac{6x-9}{3}$ b) $\dfrac{4x+10}{2x-6}$ c) $\dfrac{2x}{x^2+2x}$

**271.** Sievennä.

a) $\dfrac{5x+10}{5x-15}$ b) $\dfrac{4x+2}{10x+5}$

**272.** Sievennä lauseke.

a) $\dfrac{8x+24}{16-4x}$ b) $\dfrac{2x^2-2}{3x^2-3}$

E2

**273.** Sievennä lauseke.

a) $\dfrac{5x-2}{7x}+\dfrac{x+2}{7x}$ b) $\dfrac{3}{3x+1}-\dfrac{3}{x}$

**274.** Sievennä lauseke.

a) $\dfrac{3}{a}+\dfrac{2}{a}$ b) $\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{3}$

**275.** Sievennä lauseke $\dfrac{5x+3y}{3}+\dfrac{x-6y}{2}$. [S2008, 1c]

**276.** Sievennä.

a) $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{3(2-a)}{6}$ b) $\dfrac{x-1}{x}-\dfrac{x}{x-1}$

E3

**277.** Sievennä.

a) $\dfrac{20x}{3}\cdot\dfrac{9}{5x}$ b) $\dfrac{6x^3}{5}:\dfrac{3x}{20}$

**278.** Sievennä.

a) $\dfrac{x}{6}\cdot\dfrac{x}{4}$ b) $\dfrac{x}{6}:\dfrac{x}{4}$

**279.** Sievennä.

a) $\dfrac{1}{2x+3}-\dfrac{1}{x}$ b) $\dfrac{2}{3x}:\dfrac{2x+4}{x}$

**280.** Sievennä lauseke $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}$. [S2007, 1c]

**281.** Sievennä lauseke $\frac{a+3}{a}:\frac{3a+9}{2a}$. [K2008, 2c]

**282.** Sievennä lausekkeet. [K2006, 2]

**a)** $\frac{x^2}{3x}+\frac{2(1-x)}{6}$ **b)** $\frac{(x+2)(x-2)}{x^2-4}$ **c)** $\frac{x^{3+n}x^{4+n}}{x^7}$

**283.** Sievennä.

**a)** $\frac{x+1}{2x}\cdot\frac{5x}{5}$ **b)** $\frac{x^2}{4x+1}:\frac{x}{2}$

**284.** Sievennä.

**a)** $\frac{x}{3}-\frac{2}{3x}$ **b)** $\frac{x-2}{x+2}+\frac{4x-8}{(x+2)(x-2)}$

**285.** Mikä on lausekkeen $\frac{a(a-1)}{x}+ax$ arvo, kun $x=a-1$? [K2007, 1c]

# 5.2 Muistikaavat

Lasketaan binomien $a + b$ ja $a - b$ tulo.

$$(a+b)(a-b) = a \cdot a + a \cdot (-b) + b \cdot a + b \cdot (-b)$$
$$= a^2 - ab + ba - b^2$$
$$= a^2 - ab + ab - b^2$$
$$= a^2 - b^2$$

Koska tulo on vaihdannainen, niin $ba = ab$.

Binomien $a + b$ ja $a - b$ tulo voidaan siis kirjoittaa aina suoraan muodossa $a^2 - b^2$. Saatu tulos $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ on yksi kolmesta **muistikaavasta**. Muistikaavojen avulla lausekkeiden sieventäminen on tietyissä tilanteissa helpompaa.

Binomin toinen potenssi eli neliö voidaan toisen potenssin määritelmän mukaan kirjoittaa aina kahden saman binomin tulona. Lasketaan kahden erilaisen binomin neliöt: $(a + b)^2$ ja $(a - b)^2$.

Lasketaan ensin kahden termin $a$ ja $b$ summan neliö.

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b$$
$$= a^2 + ab + ab + b^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

Binomin $a + b$ neliö $(a + b)^2$ voidaan kirjoittaa suoraan muodossa $a^2 + 2ab + b^2$.

Lasketaan kahden termin $a$ ja $b$ erotuksen neliö.

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a \cdot a + a \cdot (-b) - b \cdot a - b \cdot (-b)$$
$$= a^2 - ab - ab + b^2$$
$$= a^2 - 2ab + b^2$$

Binomin $a - b$ neliö $(a - b)^2$ voidaan kirjoittaa suoraan muodossa $a^2 - 2ab + b^2$.

Summan ja erotuksen tulo sekä binomin neliö voidaan aina sieventää myös ilman muistikaavoja kertolaskun avulla.

**Muistikaavat**

- Termien $a$ ja $b$ summan ja erotuksen tulo.

  $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

- Termien $a$ ja $b$ summan neliö.

  $(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$

- Termien $a$ ja $b$ erotuksen neliö.

  $(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$

**ESIMERKKI 1**

Laske.

**a)** $(3x+2)(3x-2)$ **b)** $(x+3)^2$ **c)** $(2x-5)^2$

**RATKAISU**

**a)** Lasketaan termien $3x$ ja $2$ **summan ja erotuksen tulo**.

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$$(3x+2)(3x-2) = (3x)^2 - 2^2$$
$$= 3^2 x^2 - 2^2$$
$$= 9x^2 - 4$$

Tulon potenssi: $(ab)^n = a^n b^n$

**b)** Lasketaan termien $x$ ja $3$ **summan neliö**.

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$(x+3)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2$$
$$= x^2 + 6x + 9$$

Laskut voi laskea myös ilman muistikaavoja kirjoittamalla potenssit kertolaskuna.

**c)** Lasketaan termien $2x$ ja $5$ **erotuksen neliö**.

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$$(2x-5)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2$$
$$= 2^2 x^2 - 2 \cdot 2 \cdot 5x + 5^2$$
$$= 4x^2 - 20x + 25$$

**VASTAUS** **a)** $9x^2 - 4$ **b)** $x^2 + 6x + 9$ **c)** $4x^2 - 20x + 25$

# Tehtävät

E1

**286.** Laske.

**a)** $(2x + 4)(2x - 4)$ **b)** $(x + 5)^2$ **c)** $(x - 3)^2$

**287.** Laske.

**a)** $(x - 4)(x + 4)$ **b)** $(5x - 1)(5x + 1)$

**c)** $(x^2 + 2)(x^2 - 2)$ **d)** $(6x^2 + 7)(6x^2 - 7)$

**288.** Laske.

**a)** $(x + 1)^2$ **b)** $(x + 4)^2$

**c)** $(2x + 1)^2$ **d)** $(5 + 3x)^2$

**289.** Laske.

**a)** $(x - 8)^2$ **b)** $(2 - x)^2$

**c)** $(6x - 2)^2$ **d)** $(x^2 - 5)^2$

**290.** Laske.

**a)** $(4x + 2)^2$ **b)** $(7 - x)^2$

**c)** $(5x + 3)(5x - 3)$ **d)** $(6 - x)(6 + x)$

**291.** Sievennä lausekkeet.

**a)** $(x + 2y)(x - 2y)(x^2 + 4y^2)$ **b)** $(x^2 + 3)(3 - x^2)(9 - x^4)$

**292.** Sievennä.

**a)** $(x + 1)^3$ **b)** $(x - 2)^4$

# 5.3 Vastauksen tarkkuus

Luvun pyöristäminen tarkoittaa luvun numeerisen arvon korvaamista sen likiarvolla. Lukuja pyöristetään, jotta saadaan helpommin kirjoitettava tai käsiteltävä arvo alkuperäiselle luvulle.

| | | Tarkka arvo | Likiarvo |
|---|---|---|---|
| **21.12.2015 klo 11.08** | **Suomen väkiluku** | 5 474 930 | 5 500 000 |
| | **Suomen valtion velka asukasta kohti (€)** | 18 330,76 | 18 000 |

Mittaustulokset ovat aina likiarvoja, koska tuloksen tarkkuus riippuu käytetystä mittalaitteesta. Esimerkiksi massan määrittämiseen käytetään kouluissa digitaalista vaakaa, joka ilmoittaa massan gramman sadasosien tarkkuudella. Laboratorion analyysivaaka mittaa massan jopa mikrogramman (0,000 001 g) tarkkuudella.

Vastauksen antaminen oikealla ja järkevällä tarkkuudella on oleellinen osa tehtävän ratkaisua. Tilanteesta riippuen tarkkuus voidaan ilmoittaa

- merkitsevien numeroiden mukaan
- desimaalien lukumäärän mukaan
- mitta- tai lukuyksikön avulla.

Jos tehtävä sisältää ainoastaan yhteen- ja vähennyslaskuja, tulos pyöristetään desimaalien lukumäärän mukaan. Muissa tilanteissa pyöristys tehdään useimmiten merkitsevien numeroiden avulla.

Pyöristys tehdään yleensä **epätarkimman** lähtöarvon mukaan. Epätarkin lähtöarvo on tällöin se luku, jossa on

- vähiten merkitseviä numeroita tai
- vähiten desimaaleja.

| Merkitsevät numerot | |
|---|---|
| Kokonaisluku | Desimaaliluku |
| Kaikki muut numerot ovat merkitseviä paitsi nollat luvun lopussa. | Kaikki muut numerot ovat merkitseviä paitsi nollat luvun alussa. |

Joissakin tilanteissa kokonaisluvun lopussa olevat nollat voivat olla merkitseviä.

Tarkkuus ilmoitetaan lukuyksikön mukaan, kun vastaus ilmoitetaan esimerkiksi kymmenien, satojen tai tuhansien avulla. Mittayksikön tarkkuudella ilmoitetaan vastaus, kun pyöristys tehdään esimerkiksi metrien tai desilitrojen tarkkuudella. Esimerkiksi

| | |
|---|---|
| $567 \approx 570$ | kymmenien tarkkuudella |
| $3{,}2685 \text{ km} \approx 3{,}269 \text{ km}$ | metrien tarkkuudella |

**ESIMERKKI 1**

Ilmoita laskutoimitusten tulos oikealla tarkkuudella.

**a)** $2{,}56 \text{ m} + 1{,}4 \text{ m} - 0{,}05 \text{ m}$ **b)** $3 \text{ cm} \cdot 1{,}5 \text{ cm} \cdot 0{,}53 \text{ cm}$

**RATKAISU**

**a)** $2{,}56 \text{ m} + 1{,}4 \text{ m} - 0{,}05 \text{ m} = 3{,}91 \text{ m} \approx 3{,}9 \text{ m}$
Epätarkin lähtöarvo on 1,4 m, joten vastaus annetaan **yhden desimaalin** tarkkuudella.

**b)** $3 \text{ cm} \cdot 1{,}5 \text{ cm} \cdot 0{,}53 \text{ cm} = 2{,}385 \text{ cm}^3 \approx 2 \text{ cm}^3$
Epätarkin lähtöarvo on 3 cm, joten vastus annetaan **yhden merkitsevän** numeron tarkkuudella.

**VASTAUS** **a)** 3,9 m **b)** $2 \text{ cm}^3$

Jos tehtävän vastaus esitetään kymmenpotenssimuodossa, pyöristys tehdään kertoimelle, joka edeltää kymmenen potensseja.

| Kymmen-potenssiesitys | Merkitsevien numeroiden lukumäärä |
|---|---|
| $1{,}01 \cdot 10^{0}$ | 3 |
| $5{,}0 \cdot 10^{-2}$ | 2 |
| $3{,}000 \cdot 10^{5}$ | 4 |
| $1{,}02 \cdot 10^{2}$ | 3 |
| $6 \cdot 10^{4}$ | 1 |

**ESIMERKKI 2**

Ainemäärä on yksi SI-järjestelmän seitsemästä perussuureesta. Sen yksikkö on mooli (mol). Yksi mooli ainetta sisältää aina $6{,}022 \cdot 10^{23}$ kyseisen aineen perusosasta, esimerkiksi atomia. Yksi mooli rautaa painaa 55,85 g. Kuinka monta rauta-atomia sisältää puhtaasta raudasta valmistettu naula, jonka massa on 2,15 g?

**RATKAISU**

Koska yksi mooli rautaa painaa 55,85 g, naulan rauta-atomien ainemäärä mooleina on

$$\frac{2{,}15\ \text{g}}{55{,}85\ \text{g}} = 0{,}03849\ldots$$

Rauta-atomien lukumäärä on tällöin

$$0{,}03849\ldots \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = 2{,}3182\ldots \cdot 10^{22}.$$

Tehtävässä on kolme lähtöarvoa:

| | |
|---|---|
| $6{,}022 \cdot 10^{23}$ | 4 merkitsevää numeroa |
| 55,85 g | 4 merkitsevää numeroa |
| 2,15 g | 3 merkitsevää numeroa |

Naulan massa on lähtöarvoista epätarkin, joten vastaus annetaan samalla tarkkuudella eli kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.

$$2{,}3182\ldots \cdot 10^{22} \approx 2{,}32 \cdot 10^{22}$$

**VASTAUS**

$2{,}32 \cdot 10^{22}$ rauta-atomia

# Tehtävät

**293.** Kirjoita luku 5 170 000 kymmenpotenssimuodossa niin, että se esittää
**a)** kahden **b)** kolmen **c)** neljän
merkitsevän numeron tarkkuuteen pyöristettyä likiarvoa.

**294.** Ilmoita
**a)** 2,4761 m millimetrien tarkkuudella
**b)** 7,457 $m^2$ neliödesimetrien tarkkuudella
**c)** −65 320 satojen tarkkuudella
**d)** 4560 tuhansien tarkkuudella.

**295.** Monenko merkitsevän numeron tarkkuudella seuraavat likiarvot on ilmoitettu?
**a)** 100 **b)** 0,02304 **c)** 12,040
**d)** 10,1 **e)** 0,01700 **f)** −10,001

---

E1

**296.** Laske ja ilmoita oikealla tarkkuudella.
**a)** 0,05 g + 8,9 g − 1,0 g **b)** 2,5 dm · 1,62 dm

**297.** Laske ja anna vastaus kolmen merkitsevän numeron tarkkuudella.
**a)** $3{,}01 \cdot \sqrt{5} + 0{,}034$ **b)** $4{,}3 \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{2{,}30}$

E2

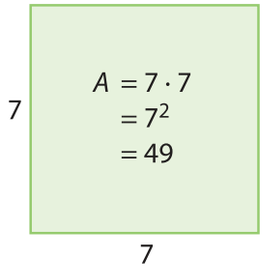
**298.** Loviisan ydinvoimalan laitosyksiköiden teho on $4{,}96 \cdot 10^8$ wattia (W). Tavallisen hiustenkuivaajan teho on 1400 wattia. Kuinka monta hiustenkuivaaja Loviisan ydinvoimalan teholla voitaisiin käyttää samanaikaisesti?

**299.** Lauttaan voidaan lastata enintään 825 000 kg:n paino. Kuinka monta autoa lautalle voidaan ottaa, jos autojen keskipaino on 1300 kg?

**300.** Mars-planeetan etäisyys Maasta on lyhimmillään $8{,}0 \cdot 10^7$ km. Marsin massa on $6{,}42 \cdot 10^{23}$ kg. Maan massa on $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg.
**a)** Avaruusraketin nopeus on 42 000 km/h. Kuinka monta tuntia matka Marsiin kestäisi?
**b)** Kuinka monta prosenttia suurempi Maan massa on Marsin massaan verrattuna?

# 5.4 Neliöjuuri

Neliön pinta-ala voidaan laskea, kun tunnetaan sivun pituus. Sellaisen neliön, jonka sivun pituus on 7, pinta-ala on 49. Pinta-ala on sivun toinen potenssi eli neliö. Luku 49 on siis luvun 7 neliö.




Tarkastellaan tilannetta, jossa neliön pinta-ala on 25 cm$^2$, mutta sivun pituus on tuntematon $x$. Muodostetaan yhtälö pinta-alan avulla

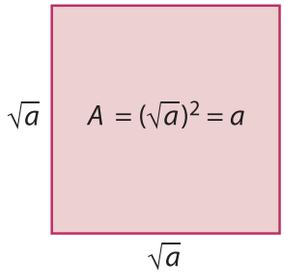
$$A = x^2 = 25$$

Neliöjuuren symbolia $\sqrt{\ }$ käytettiin ensimmäisen kerran 1500-luvun alussa. Symbolin arvellaan muodostuneen pienestä *r*-kirjaimesta, koska latinan kielen sana *radix* tarkoittaa juurta.

Etsitään luku, jonka toinen potenssi eli neliö on 25. Yhtälön toteuttaa luku $x = 5$ (cm), koska $5^2 = 25$. Lukua 5 sanotaan luvun 25 **neliöjuureksi**. Tätä merkitään

$$x = \sqrt{25} = 5 \quad \text{(cm)}.$$

Yleisesti voidaan soveltaa yllä olevaa pinta-alatulkintaa ja todeta: ei-negatiivisen luvun $a$ neliöjuuri on sen neliön sivun pituus, jonka pinta-ala on $a$.




Luvun $a$ neliöjuuri on ei-negatiivinen luku, jonka neliö eli toinen potenssi on $a$ eli $\sqrt{a} \geq 0$ ja $(\sqrt{a})^2 = a$. Juuren alla olevaa lukua $a$ sanotaan **juurrettavaksi**. Se on ei-negatiivinen, koska toinen potenssi on aina ei-negatiivinen.

**Luvun *a* neliöjuuri**

Luvun $a$ neliöjuurelle $\sqrt{a}$ on voimassa kolme ehtoa:

- $(\sqrt{a})^2 = a$
- $\sqrt{a} \geq 0$
- $a \geq 0$

Monien lukujen neliöjuuret ovat joko positiivisia kokonais- tai rationaalilukuja. Esimerkiksi

- $\sqrt{16} = 4$, koska $4^2 = 16$
- $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$, koska $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$
- $\sqrt{0} = 0$, koska $0^2 = 0$.

Koska määritelmän mukaan juurrettavan täytyy olla ei-negatiivinen luku, esimerkiksi $\sqrt{-9}$ ei ole määritelty (reaalilukualueessa).

Neliöjuurilausekkeiden sieventämisessä voidaan käyttää seuraavia laskusääntöjä:

| Sääntö | | Esimerkki |
|---|---|---|
| **Tulon neliöjuuri** | $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ | $\sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$ |
| **Osamäärän neliöjuuri** | $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ | $\sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ |
| **Neliön neliöjuuri** | $\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$ | $\sqrt{(-8)^2} = \lvert -8 \rvert = 8$ |

Laskimen avulla voidaan juurilausekkeet sieventää helposti. Yksinkertaiset juurilausekkeet on kuitenkin hyvä osata sieventää myös ilman laskinta. Pyrkimyksenä on saada juurrettava mahdollisimman pieneksi.

**ESIMERKKI 1**

Sievennä lauseketta.

**a)** $\sqrt{18}$ **b)** $\sqrt{18} - 5\sqrt{2}$ **c)** $\sqrt{\frac{4}{25}}$

**RATKAISU**

**a)** $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ ← $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

**b)** $\sqrt{18} - 5\sqrt{2} = 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = (3-5)\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$

**c)** $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$ ← $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

**VASTAUS**

**a)** $3\sqrt{2}$ **b)** $-2\sqrt{2}$ **c)** $\frac{2}{5}$

**ESIMERKKI 2**

Sievennä lauseketta.

**a)** $\sqrt{2}(\sqrt{8}-\sqrt{10})$ **b)** $\sqrt{45}+\sqrt{\frac{2}{18}}$ **c)** $\sqrt{(2-\pi)^2}$

**RATKAISU**

**a)** $\sqrt{2}(\sqrt{8}-\sqrt{10})$

$= \sqrt{2}\cdot\sqrt{8}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}$ ← $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$

$= \sqrt{2\cdot 8}-\sqrt{2\cdot 10}$

$= \sqrt{16}-\sqrt{20}$

$= 4-\sqrt{4\cdot 5}$

$= 4-\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}$

$= 4-2\sqrt{5}$

**b)** $\sqrt{45}+\sqrt{\frac{2}{18}}$ ← $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$= \sqrt{9\cdot 5}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$ ← $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$

$= \sqrt{9}\cdot\sqrt{5}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}}$

$= 3\sqrt{5}+\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$

$= 3\sqrt{5}+\frac{1}{3}$

**c)** $\sqrt{(2-\pi)^2}$

$= |2-\pi|$

$= -2+\pi$ ← $2-\pi<0$, joten $|2-\pi|=-(2-\pi)=-2+\pi$

$= \pi-2$

**VASTAUS** **a)** $4-2\sqrt{5}$ **b)** $3\sqrt{5}+\frac{1}{3}$ **c)** $\pi-2$

# Tehtävät

Sievennä tehtävien 301–308 juurilausekkeet.

**301.** a) $\sqrt{49}$ b) $\sqrt{81}$ c) $\sqrt{121}$
d) $\sqrt{25}$ e) $\sqrt{144}$ f) $\sqrt{225}$

E1

**302.** a) $\sqrt{27}$ b) $\sqrt{27}-6\sqrt{3}$ c) $\sqrt{\frac{7}{64}}$

**303.** a) $\sqrt{5\cdot 25}$ b) $\sqrt{9\cdot 6}$ c) $-\sqrt{3\cdot 81}$

**304.** a) $\sqrt{20}$ b) $\sqrt{12}$ c) $\sqrt{72}$

**305.** a) $\sqrt{\frac{5}{16}}$ b) $\sqrt{\frac{9}{49}}$ c) $\sqrt{\frac{48}{3}}$

**306.** a) $\sqrt{13^2}$ b) $\sqrt{11}\cdot\sqrt{11}$ c) $\sqrt{(-7)^2}$

E2

**307.** a) $\sqrt{3}(\sqrt{8}-\sqrt{18})$ b) $\sqrt{50}+\sqrt{\frac{3}{75}}$ c) $\sqrt{(\pi-2)^2}$

**308.** a) $(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)$ b) $(\sqrt{7}+2)^2$ c) $\sqrt{(1-2\pi)^2}$

**309.** Osoita yhtälö $\sqrt{9+4\sqrt{2}}=\sqrt{8}+1$ todeksi neliöjuuren määritelmää käyttäen.

# 6 Kertaus: Lausekkeet ja yhtälöt

## Tässä luvussa kerrataan

- suureiden välinen lineaarinen riippuvuus ja verrannollisuus
- ongelmien muotoileminen yhtälöiksi
- yhtälöiden ja yhtälöparien graafinen ja algebrallinen ratkaiseminen
- ratkaisujen tulkinta ja arvioiminen
- toisen asteen polynomifunktio ja toisen asteen yhtälön ratkaiseminen

**6.1 Kurssin keskeiset asiat**

- Kerrataan kurssin keskeiset käsitteet ja asiat.
- Kaikki luvun tehtävät on tarkoitus ratkaista **ilman laskinta**.

**6.2 Matemaattisia malleja**

- Kerrataan matemaattisen mallin muodostamista ja mallin käyttöä erilaisissa tilanteissa.
- Kerrataan laskimen käyttöä.
- Kaikki luvun tehtävät on tarkoitus ratkaista **laskimen avulla**.

**6.3 Monivalintatehtäviä**

- Kerrataan kurssin asioita monivalintatehtävien avulla.
- Tehtävät on tarkoitus ratkaista **ilman laskinta**.

# 6.1 Kurssin keskeiset asiat

## Lausekkeilla laskeminen

- **Polynomi** on summalauseke, jonka muuttujaosien eksponentti on positiivinen kokonaisluku tai nolla.
- Polynomeja nimetään yleensä isoilla kirjaimilla.
- **Polynomien yhteenlaskussa** samanmuotoiset termit yhdistetään laskemalla yhteen termien kertoimet. Muuttujaosa säilyy laskutoimituksessa ennallaan.

  $ax + bx = (a + b)x$

- **Polynomien vähennyslaskussa** vähennetään samanmuotoisten termien kertoimet. Muuttujaosa säilyy laskutoimituksessa ennallaan.

  $ax - bx = (a - b)x$

- Kun **polynomilauseketta sievennetään**:

  1. Poistetaan sulut.
  2. Yhdistetään samanmuotoiset termit.
  3. Järjestetään termit asteluvun mukaan.

- Lauseke **kerrotaan monomilla** siten, että monomilla kerrotaan erikseen jokainen lausekkeen termi ja saadut tulot lasketaan yhteen.

  $a(b + c) = ab + ac$

- **Kahden polynomin tulossa** kaikki termit kerrotaan vuoron perään toisillaan.

  $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

- Mikäli lauseke sisältää useita eri laskutoimituksia, sievennettäessä on muistettava noudattaa oikeaa laskujärjestystä:

  1. sulkuihin merkityt laskutoimitukset
  2. kerto- ja jakolaskut sekä potenssiin korotukset
  3. yhteen- ja vähennyslaskut.

## Yhtälöitä

- Kun kaksi lauseketta merkitään yhtä suuriksi, syntyy yhtälö.
  - Sellaista tuntemattoman arvoa, jolla yhtälö on tosi, sanotaan yhtälön ratkaisuksi eli yhtälön juureksi.

- **Ensimmäisen asteen yhtälö voidaan** sieventää muotoon

  $ax + b = 0, \quad a \neq 0, a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}.$

- Ensimmäisen asteen yhtälöä ratkaistaessa voidaan käyttää seuraavia keinoja:
  - Yhtälön molemmille puolille voidaan lisätä sama luku tai lauseke.
  - Yhtälön molemmat puolet voidaan kertoa tai jakaa samalla luvulla tai lausekkeella. Tämä luku ei saa olla nolla.

- Jos yhtälö sisältää nimittäjiä, ne poistetaan seuraavasti:

  1. Kirjoitetaan kaikki termit nimittäjien kanssa.
     Jos termillä ei ole nimittäjää, nimittäjäksi voidaan merkitä luku 1.
  2. Lavennetaan samannimisiksi.
  3. Kerrotaan yhtälön molemmat puolet yhteisellä nimittäjällä.

- **Toisen asteen yhtälö** voidaan sieventää muotoon

  $ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0.$

- Toisen asteen yhtälön $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, ratkaisut ovat

  $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- Toisen asteen yhtälön ratkaisemisessa on seuraavat vaiheet:

  1. Toisen asteen yhtälö sievennetään ensin muotoon, jossa yhtälön toisella puolella on nolla.
  2. Toisen asteen polynomista poimitaan termien kertoimet $a$, $b$ ja $c$.
  3. Sijoitetaan kertoimia vastaavat lukuarvot ratkaisukaavaan ja lasketaan merkityt laskutoimitukset.

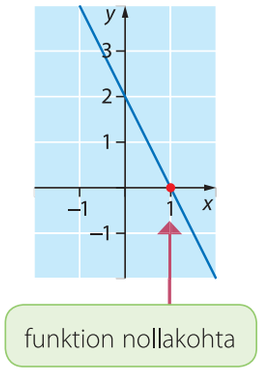
- Toisen asteen yhtälöä, josta puuttuu vakiotermi, ensimmäisen asteen termi tai molemmat, kutsutaan **vaillinaiseksi toisen asteen yhtälöksi**.
  - Vaillinaiset toisen asteen yhtälöt voidaan ratkaista ilman ratkaisukaavaa.

## Funktioita

- **Ensimmäisen asteen polynomifunktio** eli lineaarinen funktio voidaan sieventää muotoon

  $f(x) = ax + b, \quad a \neq 0, a \in \mathbf{R}$ ja $b \in \mathbf{R}$.

- Lineaarisen funktion $f(x) = ax + b$ kuvaaja on
  - laskeva suora, jos $a < 0$
  - nouseva suora, jos $a > 0$.

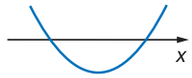



- **Funktion nollakohdassa** kuvaaja leikkaa $x$-akselin. Nollakohdat saadaan ratkaisemalla yhtälö $f(x) = 0$.

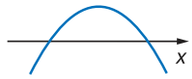
- **Toisen asteen polynomifunktio** voidaan sieventää muotoon

  $f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$

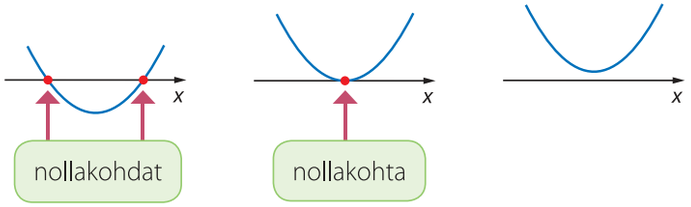
- Toisen asteen polynomifunktion kuvaajaa kutsutaan paraabeliksi.
  - Paraabeli aukeaa ylöspäin, jos $a > 0$.



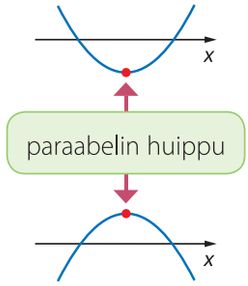

  - Paraabeli aukeaa alaspäin, jos $a < 0$.




- Toisen asteen polynomifunktiolla on korkeintaan kaksi nollakohtaa.

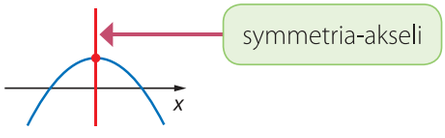



- **Huippupisteessä** paraabelin kulkusuunta muuttuu.
  - Jos paraabeli on ylöspäin aukeava, huippu sijaitsee kuvaajan matalimmassa kohdassa.
  - Jos paraabeli on alaspäin aukeava, huippu sijaitsee kuvaajan korkeimmassa kohdassa.




- Paraabelin huippu sijaitsee nollakohtien puolivälissä.

- Paraabeli on symmetrinen huipun kautta kulkevan **symmetria-akselin** suhteen.



## Yhtälöpari

- Yhtälöparissa on kaksi yhtälöä ja kaksi tuntematonta, esimerkiksi $x$ ja $y$.
  - Yhtälöparin ratkaisuna ovat ne tuntemattomien $x$ ja $y$ arvot, joilla molemmat yhtälöt toteutuvat samanaikaisesti.

- **Lineaarinen yhtälöpari** sisältää vain ensimmäisen asteen termejä.

- Jos yhtälöiden kaikki termit eivät ole ensimmäistä astetta, yhtälöpari on **epälineaarinen**.

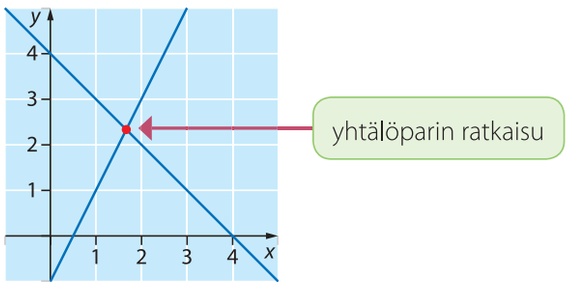
- Yhtälöparissa yhtälö on ratkaistussa muodossa, jos se on ratkaistu toisen muuttujan suhteen.
  - Yhtälöpari kannattaa ratkaista algebrallisesti **sijoitusmenetelmällä**.
  - Vaikka kumpikaan yhtälöistä ei olisi ratkaistussa muodossa, voi toisesta (tai molemmista) yhtälöstä ratketa helposti toinen tuntematon toisen avulla. Tällöin kannattaa yleensä käyttää sijoitusmenetelmää.

  1. Ratkaistaan jompikumpi yhtälöistä toisen tuntemattoman suhteen.
  2. Sijoitetaan ratkaistu tuntematon toiseen yhtälöön, jolloin muodostuu yhden muuttujan yhtälö.
  3. Ratkaistaan muodostunut yhden muuttujan yhtälö.
  4. Ratkaistaan toinen tuntematon sijoittamalla saatu arvo toiseen alkuperäisistä yhtälöistä.

- Yhtälöpari voidaan ratkaista myös **yhteenlaskumenetelmän** avulla.

  1. Kerrotaan yhtälö sellaisella luvulla, että toinen tuntemattomista saadaan eliminoitua, kun yhtälöt lasketaan puolittain yhteen.
  2. Lasketaan yhtälöt puolittain yhteen.
  3. Ratkaistaan muodostunut yhden muuttujan yhtälö.
  4. Ratkaistaan toinen tuntematon sijoittamalla saatu arvo toiseen alkuperäisistä yhtälöistä.

- Yhtälöpari voidaan **ratkaista graafisesti** etsimällä yhtälöiden kuvaajien leikkauspisteet.



## Suhde ja verrannollisuus

- Kahden suureen osamäärää voidaan kutsua **lukujen väliseksi suhteeksi**.
  - Suhde sievennetään ja esitetään murtolukuna tai jakopisteen avulla.
  - Jakolaskun tuloksena saatu luku eli **suhteen arvo** on yksikötön.

- Kun kaksi suhdetta merkitään yhtä suuriksi, syntyy **verrantoyhtälö eli verranto**.

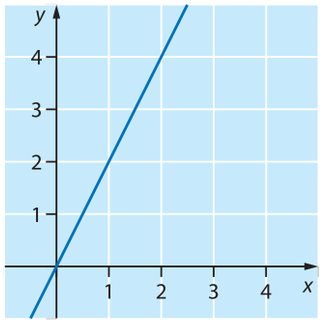
- Verrantoyhtälö ratkaistaan **ristiin kertomalla**.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$
$$ad = bc$$

- Suureet $x$ ja $y$ ovat **suoraan verrannollisia**, jos toisen suureen muuttuessa toisen suureen arvo muuttuu samaan suuntaan ja samassa suhteessa.
  - Suureiden suhde on vakio.

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}$$

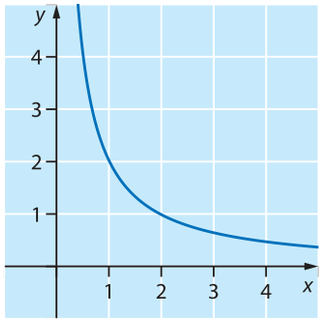
  - Suureiden välistä riippuvuutta kuvaa yhtälö $y = kx$, jossa $k$ on **verrannollisuuskerroin**.
  - Riippuvuuden kuvaaja koordinaatistossa on suora.




- Suureet $x$ ja $y$ ovat **kääntäen verrannollisia**, jos toisen suureen kasvaessa toisen suureen arvo pienenee samassa suhteessa.
  - Suureiden tulo on aina vakio.

$$x_1 y_1 = x_2 y_2$$

  - Suureiden välistä riippuvuutta kuvaa yhtälö $y = k \cdot \frac{1}{x}$, jossa $k$ on verrannollisuuskerroin.
  - Riippuvuuden kuvaaja koordinaatistossa on hyperbeli.



# Tehtävät

**1.** Sievennä lausekkeet.

**a)** $(2x^2 + x) - 3(x + 2)$ **b)** $-9(x + 1) + 5(x + 2)$

**c)** $(3x - 2)(4 - 5x)$ **d)** $4x^2 - (x - 1)(7x - 4)$

**2.** Olkoon $P(x) = 2x - x^2$ ja $R(x) = x^2 - 4x$.

**a)** Muodosta ja sievennä polynomi $Q(x) = P(x) - R(x)$.

**b)** Laske $Q(-3)$.

**c)** Ratkaise yhtälö $Q(x) = 0$.

**3.** Ratkaise

**a)** yhtälö $3x + 2 = x - 4(5x - 1)$

**b)** yhtälö $\frac{x}{10} + \frac{x}{15} = x + 1$.

[K2005, 1]

**4.** Ratkaise yhtälö.

**a)** $x^2 + 5x + 4 = 0$ **b)** $7x = 3x^2$

**5.** Ratkaise yhtälö.

**a)** $\frac{k}{3} = \frac{2}{9}$ **b)** $\frac{s}{2 + s} = \frac{4}{5}$ **c)** $\frac{x}{x^2 + 5} = \frac{3}{2x}$

**6.** Ratkaise yhtälö.

**a)** $3x - \frac{x - 2}{3} = \frac{1}{2}$ **b)** $\frac{2}{2x + 3} = \frac{3}{4}$

**7.** **a)** Määritä lausekkeen $x(4x - 2) - 3x(x - 1) - x$ arvo, kun $x = -1$.

**b)** Anna esimerkki toisen asteen yhtälöstä, jonka yksi juuri on $x = 1$.

**c)** Muuttujan arvo $x = 2$ toteuttaa yhtälön $x(x - 5) + ax = 2$. Määritä kerroin $a$. [K2015, 2]

**8.** **a)** Ratkaise yhtälö $2x^2 = x$.

**b)** Laske lausekkeen $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$ arvo, kun $a = 1$ ja $b = \frac{1}{2}$.

**c)** Ratkaise yhtälö $\frac{x}{3} = \frac{x - 1}{4}$. [K2014, 1]

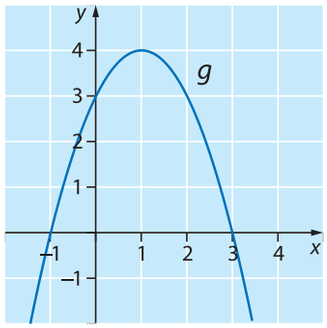
**9.** Millä muuttujan $x$ arvoilla lauseke $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$ saa arvon $\frac{3}{4}$?

**10.** **a)** Ratkaise yhtälö $(x-2)^2 = 4$.

**b)** Millä muuttujan $x$ arvolla lausekkeet $2x + 3$ ja $-(x + 3)$ saavat saman arvon?

**c)** Laske lausekkeen $a(b-2) + (a-b)^2 - b(1-a)$ arvo, kun $a = 2$ ja $b = -2$. [S2013, 1]

**11.** Ratkaise tehtävät funktion $g$ kuvaajan avulla.




**a)** Määritä $g(1)$.

**b)** Ratkaise yhtälö $g(x) = 3$.

**c)** Määritä funktion $g$ nollakohdat.

**d)** Ratkaise epäyhtälö $g(x) > 0$.

**12.** Olkoon paraabeli $g(x) = -2x(-x + 6)$.

**a)** Mikä on paraabelin aukeamissuunta?

**b)** Milloin $g(x) = 0$?

**13.** Määritä funktion $f(x) = 3x^2 - 48$ nollakohdat ja huippupiste.

**14.** Olkoon $f(x) = x^2 + 4x - 5$.

**a)** Laske paraabelin huipun koordinaatit.

**b)** Mikä on paraabelin symmetria-akselin yhtälö?

**15.** Määritä funktioiden $f(x) = -4x + 3$ ja $f(x) = -6x + 7$ kuvaajien leikkauspiste.

**16.** Missä pisteissä funktioiden $f(x) = x^2 - 3x - 1$ ja $g(x) = 5 - 2x$ kuvaajat leikkaavat toisensa?

**17.** Toisen asteen polynomifunktion $f(x) = -3x^2 + 2kx - k$ kuvaaja kulkee pisteen $(-1, -9)$ kautta. Määritä $k$.

**18.** Ratkaise yhtälöpari $\begin{cases} 5x - 2y = 3 \\ 2x - 3y = -1 \end{cases}$.

**19.** Piirrä funktioiden $f(x) = 3x - 4$ ja $g(x) = -x + 4$ kuvaajat ja määritä kuvaajien avulla piste, jossa ne leikkaavat toisensa.

**20.** Suure $a$ on suoraan verrannollinen suureen $b$ neliöön. Suureet voivat saada vain positiivisia arvoja. Jos $a = 1$, niin $b = 3$.

**a)** Mikä on suureen $a$ arvo, jos $b = 4$?

**b)** Mikä on suureen $b$ arvo, jos $a = 4$?

**21.** Jalkapallokentän pituus on 35 m suurempi kuin kentän leveys. Muodosta yhtälö ja ratkaise kentän mitat, kun kentän piiri on 350 m.

**22.** Kaksikielisen kunnan asukkaista suurin osa oli suomenkielisiä. Suomenkielisten ja ruotsinkielisten henkilöiden lukumäärien suhde oli 5:3. Kuinka paljon ruotsinkielisiä asukkaita kunnassa oli, kun asukkaita oli yhteensä 1600?

**23.** Pieni kunta liitetään kuntaliitoksessa lähimpään kaupunkiin. Kunnan asukasluku on kolmasosa kaupungin asukasluvusta. Liitoksen jälkeen kaupungin asukasluku on 16 000. Muodosta yhtälö ja ratkaise sen avulla pienen kunnan asukasluku.

**24.** Sisäovien mitat voivat vaihdella, mutta ne on kuitenkin standardoitu asennusten helpottamiseksi. Jos mittojen suhde on 2:5, oviaukon ala on 160 $dm^2$. Laske oviaukon mitat. Anna mitat senttimetreinä.

**25.** Sähköliike haluaa suurentaa suorakulmion muotoisen lehti-ilmoituksensa pinta-alaa lisäämällä ilmoituksen korkeutta ja leveyttä yhtä paljon. Uuden ilmoituksen pinta-ala on tällöin 9 $cm^2$ suurempi kuin vanhan. Mitkä ovat uuden ilmoituksen mitat, kun vanhan ilmoituksen leveys on 3 cm ja korkeus 5 cm? Muodosta yhtälö ja ratkaise se.

**26.** Kiinalainen arvoitus 5000 vuoden takaa: Häkissä on fasaaneja ja kaniineja. Niillä on yhteensä 35 päätä ja 94 jalkaa. Kuinka monta fasaania ja kuinka monta kaniinia häkissä on? [K2014, 6]

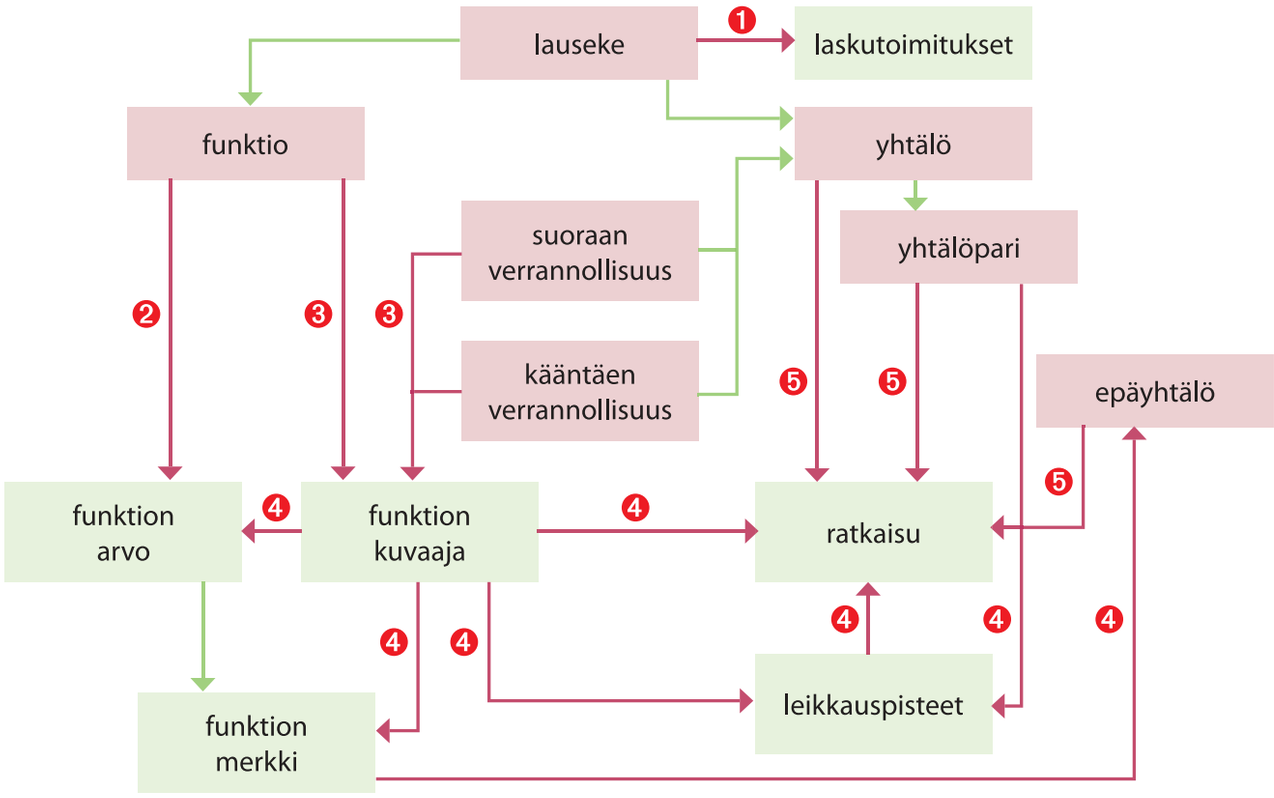
**27.** Huonekaluja valmistava yritys valmistaa päivän aikana yhteensä 30 pöytää ja tuolia. Yritys laajentaa toimintaansa, jolloin pöytien tuotanto kaksinkertaistuu ja tuolien tuotanto kolminkertaistuu. Tuotteita valmistetaan laajennuksen jälkeen yhteensä 80. Kuinka monta pöytää ja kuinka monta tuolia valmistetaan laajennuksen jälkeen?

# 6.2 Matemaattisia malleja

Teknisen apuvälineen käyttöä tulee harjoitella samalla tavalla kuin matemaattisten tehtävien ratkaisua muutenkin: erilaisia tehtäviä on ratkaistava riittävä määrä, jotta toiminnot tulevat tutuiksi. Tällä kurssilla teknistä apuvälinettä on opeteltu käyttämään seuraavissa tilanteissa:

1. Laskimella voidaan **sieventää lausekkeita** ja **tallentaa niitä** laskimen muistiin.
2. Kun lauseke on tallennettu laskimen muistiin, voidaan **laskea lausekkeen arvo** helposti laskimella.
3. Teknisen apuvälineen avulla voidaan **piirtää funktioiden kuvaajia**.
4. Funktion kuvaajan avulla voidaan **ratkaista graafisesti** mm. **funktion arvoja**, **yhtälöitä**, **epäyhtälöitä** ja **leikkauspisteitä**, mikäli tehtävänanto näin sallii.
5. **Yhtälöt** ja **yhtälöparit** ratkaistaan algebrallisesti suoraan laskimen **ratkaise-toiminnolla**.

Kun tilanteita ratkaistaan kuvaajien avulla, tehtävässä tarvittavat tiedot on saatava näkyviin piirrettyyn kuvaajaan. Tästä syystä **kuvaajanäkymää** pitää osata **suurentaa** tai **pienentää** tarpeen mukaan.



**ESIMERKKI 1**

Ida matkustaa 30 päiväksi Barcelonaan. Hän ostaa lentoliput Helsingistä Barcelonaan ja takaisin hintaan 141 €. Ida majoittuu Barcelonassa osaksi aikaa perhemajoitukseen ja osaksi aikaa hostelliin. Perhemajoitus maksaa 20 €/yö ja hostelli 43 €/yö.

**a)** Muodosta ja sievennä polynomi $H(x)$, joka kuvaa matkan kokonaiskustannuksia, kun hostellissa yövytään $x$ yötä.

**b)** Laske matkan kokonaiskustannukset, kun hostellissa yövytään puolet matka-ajasta.

**c)** Idan suunniteltu matkabudjetti lentojen ja majoituksen osalta on 1200 €. Kuinka monta yötä korkeintaan Ida voi viettää hostellissa?

**RATKAISU**

**a)** Hostellissa yövytään matkan aikana $x$ yötä. Tällöin hostellin majoituskustannuksia (€) koko matkan aikana kuvaa lauseke $43x$.

Perhemajoituksessa majoitutaan matkan aikana $30 - x$ kertaa. Tällöin perhemajoituksen kustannukset (€) koko matkan aikana ovat $20(30 - x)$.

Koko matkan kustannukset koostuvat lentomatkasta, hostellin majoituskuluista sekä perhemajoituksen kuluista.

| lentoliput | hostelli | perhemajoitus |
|---|---|---|
| 141 € | $43x$ € | $20(30 - x)$ € |

Matkan kokonaiskustannuksia (€) kuvaava funktio on

$$H(x) = 141 + 43x + 20(30 - x) = 23x + 741.$$

Puolet matka-ajasta on $\frac{30}{2} = 15$ päivää.

**b)** Lasketaan majoituksen kokonaiskustannukset, kun hostellissa yövytään 15 kertaa.

$$H(15) = 23 \cdot 15 + 741 = 1086 \quad (€)$$

**c)** Matkakustannukset voivat olla korkeintaan 1200 €. Muodostetaan epäyhtälö ja ratkaistaan se.

$$H(x) \leq 1200$$
$$23x + 741 \leq 1200$$
$$x \leq 19{,}956\ldots$$

Suurin mahdollinen hostelliyöpymisten määrä, joka toteuttaa ehdon $x \leq 19{,}956\ldots$, on 19. Ida voi siis viettää korkeintaan 19 yötä hostellissa.

**VASTAUS**

**a)** $H(x) = 23x + 741$ **b)** 1086 € **c)** korkeintaan 19 yötä

**ESIMERKKI 2**

Ojan poikkileikkaus on osa ylöspäin aukeavaa paraabelia $p(x) = \frac{5}{4}(x^2 - 1{,}5x)$ (m). Maanpintaa kuvaa $x$-akseli.

**a)** Kuinka leveä oja on maanpinnan tasossa?

**b)** Kuinka syvä oja on syvimmillään?

Ilmoita vastaukset yhden desimaalin tarkkuudella.

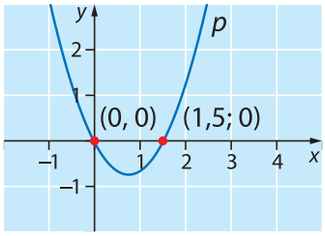
**RATKAISU**

**a)** Ratkaistaan ensin funktion $p$ nollakohdat.

$$p(x) = 0$$

$$\frac{5}{4}(x^2 - 1{,}5x) = 0$$

$$x = 0 \text{ tai } x = 1{,}5$$




Ojan leveys maanpinnan tasossa on nollakohtien välinen matka eli

$$1{,}5 \text{ m} - 0 \text{ m} = 1{,}5 \text{ m}.$$

Huippupiste on paraabelin minimipiste. Minimipiste voidaan etsiä myös kuvaajan avulla.

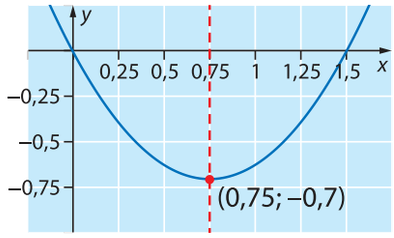
**b)** Ojan syvyys saadaan selville paraabelin huippupisteen avulla.

Huippukohta sijaitsee nollakohtien puolivälissä eli

$$x = \frac{0 + 1{,}5}{2} = 0{,}75 \text{ (m)}.$$

Lasketaan funktion arvo huippukohdassa.

$$p(0{,}75) = \frac{5}{4}\left((0{,}75)^2 - 1{,}5 \cdot 0{,}75\right) = -0{,}7103\ldots$$




Koska maanpintaa kuvaa $x$-akseli, niin syvyys on $0{,}7103\ldots \text{ m} \approx 0{,}7 \text{ m}$.

**VASTAUS**

**a)** 1,5 m **b)** 0,7 m

## ESIMERKKI 3

Kerhon A järjestämän kotitalouskurssin hinta sisältää 30 €:n kiinteän maksun. Lisäksi jokaiselta tunnilta veloitetaan 1,50 €. Kerho B järjestää sisällöltään samanlaisen kurssin, mutta perii maksun vain läsnäolotunneilta. Osallistumismaksu kerhon *B* kurssille on 3,00 €/h.

**a)** Muodosta kummankin kerhon kurssin läsnäolotuntien $x$ ja kurssin kustannusten $y$ (€) välistä riippuvuutta kuvaavat yhtälöt.

**b)** Kuvaa kummankin kerhon kurssin kustannusten riippuvuutta läsnäolotuntien määrästä koordinaatistossa. Päättele kuvaajien perusteella, kumman kerhon kurssi kannattaa valita, jos pystyy osallistumaan 16 tunnille.

**c)** Julia osallistuu kerhon A kurssille ja Leo kerhon B kurssille. Molemmat maksavat kurssista saman hinnan. Kuinka monelle tunnille Julia ja Leo osallistuvat?

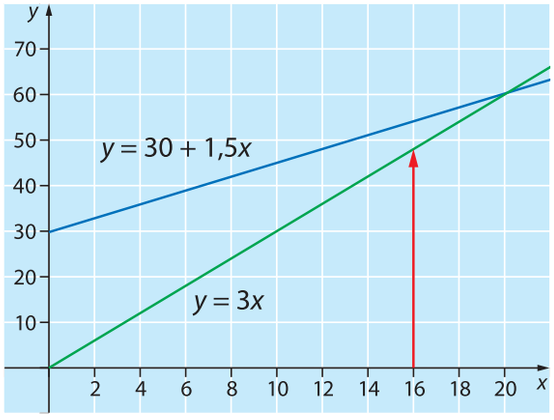
**RATKAISU**

**a)** Kerhon A kurssilla kustannukset koostuvat kiinteästä 30 euron maksusta sekä tuntiveloituksesta. Kerhon A kurssin kustannusten $y$ riippuvuutta läsnäolotuntien määrästä $x$ kuvaa yhtälö

$$y = 30 + 1{,}50x.$$

Kerhon *B* kustannukset riippuvat vain läsnäolotuntien määrästä. Kerhon *B* kurssin kustannusten $y$ riippuvuutta läsnäolotuntien määrästä $x$ kuvaa yhtälö

$$y = 3{,}00x.$$




**b)** Kun $x = 16$, kerhon B kustannuksia kuvaava suora on kerhon A kustannuksia kuvaavan suoran alapuolella. Kerhon B kurssin kustannukset ovat siis pienemmät.

**c)** Kurssien kustannukset ovat yhtä suuret suorien leikkauspisteessä. Ratkaistaan leikkauspisteen $x$-koordinaatti eli tuntimäärä yhtälöparin avulla.

$$\begin{cases} y = 30 + 1{,}50x \\ y = 3{,}00x \end{cases}$$

$x = 20$ ja $y = 60$

Julia ja Leo osallistuvat molemmat 20 tunnille.

**VASTAUS**

**a)** kerho A: $y = 30 + 1{,}50x$, kerho B: $y = 3{,}00x$
**b)** kerhon B kurssi **c)** 20 tunnille

**ESIMERKKI 4**

Fysiikan tunnilla tutkitaan liike-energian määrää erilaisissa tilanteissa.

**a)** Kun Taavi kävelee tasaisella nopeudella 1,20 m/s, hänellä on liike-energiaa 54,0 J. Taavin liike-energian määrä on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön. Kuinka paljon Taavilla on liike-energiaa, kun hän juoksee nopeudella 1,90 m/s?

**b)** Muodosta verrannollisuutta kuvaava yhtälö, kun nopeutta merkitään kirjaimella $x$ ja liike-energian määrää kirjaimella $y$. Mikä on verrannollisuuskerroin?

**c)** Kun liike-energian määrä pysyy vakiona, massa on kääntäen verrannollinen nopeuden neliöön. Taavi painaa 75,0 kg ja Vilma 55,0 kg. Kuinka nopeasti Vilman tulee liikkua, jotta hänen liike-energian määränsä olisi yhtä suuri kuin Taavin liike-energian määrä hänen kävellessään nopeudella 1,2 m/s?

**RATKAISU**

**a)** Kootaan tiedot taulukkoon.

| Liike-energia (J) | Nopeus (m/s) | Nopeuden neliö ($m^2/s^2$) |
|---|---|---|
| 54,0 | 1,20 | $1{,}20^2$ |
| $x$ | 1,90 | $1{,}90^2$ |

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$\frac{54{,}0}{x} = \frac{1{,}20^2}{1{,}90^2}$$

Suoraan verrannollisuus: liike-energian ja nopeuden neliön suhde on sama.

$$x = 135{,}375 \approx 135 \text{ (J)}$$

Taavin liike-energian määrä juostessa on 135 J.

**b)** Merkintään nopeutta (m/s) kirjaimella $x$ ja liike-energiaa (J) kirjaimella $y$. Valitaan aiemmin esitetystä taulukosta yksi lukupari nopeudelle ja sitä vastaavalle liike-energialle.

| Liike-energia (J) | Nopeus (m/s) | Nopeuden neliö ($m^2/s^2$) |
|---|---|---|
| 54,0 | 1,20 | $1{,}20^2$ |
| $y$ | $x$ | $x^2$ |

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä $y$.

$$\frac{54{,}0}{y} = \frac{1{,}20^2}{x^2}$$

$$y = 37{,}5x^2$$

Verrannollisuutta voidaan kuvata yhtälöllä $y = 37{,}5x^2$, missä 37,5 on verrannollisuuskerroin.

**c)** Kootaan tiedot taulukkoon.

| Massa (kg) | Nopeus (m/s) | Nopeuden neliö ($m^2/s^2$) |
|---|---|---|
| 75,0 | 1,20 | $1{,}20^2$ |
| 55,0 | $x$ | $x^2$ |

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan se.

$$55{,}0x^2 = 75{,}0 \cdot 1{,}20^2$$

Kääntäen verrannollisuus: massan ja nopeuden neliön tulo on sama.

$$x = -1{,}401\ldots \quad \text{tai} \quad x = 1{,}401\ldots$$

Nopeus on positiivinen, joten $x = 1{,}401\ldots \approx 1{,}40$ (m/s).

**VASTAUS**

**a)** Taavin liike-energian määrä juostessa on 135 J.
**b)** Verrannollisuutta voidaan kuvata yhtälöllä $y = 37{,}5x^2$, missä 37,5 on verrannollisuuskerroin.
**c)** Vilman on kuljettava nopeudella 1,40 m/s.

# Tehtävät

E1

**28.** Eräässä kaupungissa 50 $m^2$:n kokoisesta keskusta-asunnosta joutuu maksamaan vuokraa 600 € kuukaudessa. Jos hankkii oman, vastaavan kokoisen asunnon samasta kerrostalosta, joutuu hankintahinnan 85 000 euron lisäksi maksamaan kuukausittain 150 € yhtiövastiketta.

**a)** Muodosta vuotuisia asumiskustannuksia esittävät polynomit kummankin asumismuodon kohdalla, kun asunnoissa on asuttu $x$ kuukautta.

**b)** Laske kummankin asumismuodon kokonaiskustannukset, kun asunnoissa on asuttu 10 vuotta.

**c)** Kuinka pitkän ajan kuluttua vuokra-asumisen kustannukset ylittävät omistusasumisen kustannukset? Anna vastaus vuosina ja kuukausina.

**29.** Yritys valmistaa ja myy nahkaisia kännykkäkoteloita hintaan 17,25 €. Valmistuskustannukset kännykkäkoteloa kohden ovat 12,30 €. Lisäksi yhtiön kiinteät kustannukset ovat 12 000 €.

**a)** Muodosta polynomi $K(x)$, joka kuvaa yrityksen kokonaiskustannuksia, kun kännykkäkoteloiden valmistusmäärä on $x$ kappaletta.

**b)** Kuinka suuret ovat valmistuskustannukset, jos kännykkäkoteloita valmistetaan 10 000 kappaletta?

**c)** Oletetaan, että yritys valmistaa juuri niin monta kännykkäkoteloa kuin se saa kaupaksi. Muodosta polynomi $V(x)$, joka kuvaa yrityksen saamaa voittoa, kun kännykkäkoteloiden valmistusmäärä on $x$ kappaletta. Kuinka monta kännykkäkoteloa yrityksen tulee vähintään myydä, jotta koteloiden valmistus kannattaa?

**30.** Kahden sähköyhtiön A ja B hinnoittelu perustuu kiinteään kuukausittaiseen perusmaksuun, johon lisätään sähkön kulutuksen mukainen lisämaksu. Yhtiöiden tarjoamat hinnat selviävät alla olevasta taulukosta.

| Yhtiö | Perusmaksu €/kk | Yksikköhinta snt/kWh |
|---|---|---|
| A | 4,02 | 6,62 |
| B | 3,75 | 7,99 |

**a)** Muodosta lausekkeet $a(x)$ ja $b(x)$ kummankin yhtiön tarjoaman sähkön kokonaishinnalle, kun sähköä kuluu $x$ kWh ja aikavälinä on yksi kuukausi.

**b)** Kuinka suuri täytyisi sähkönkulutuksen olla kuukausittain, jotta kokonaishinnat olisivat samat?

**c)** Kuinka suuri on sähkön kokonaishintojen välinen ero vuoden aikana, jos sähköä kuluu 2000 kWh vuodessa? [S2015, 6]

**31.** Vuonna 2014 pääomatulojen veroprosentti on 40 000 euroon saakka 30 ja sen yli menevältä osalta veroprosentti on 32.

**a)** Muodosta lauseke $f(x)$ pääomatuloveron suuruudelle, kun pääomatulo $x$ on yli 40 000 euroa vuodessa.

**b)** Laske veron määrä, kun pääomatuloja on 41 700,23 euroa vuodessa.

**c)** Kun yksityishenkilö saa osinkotuloa pörssiyhtiön osakkeista, niin veronalainen osuus on 85 % osinkotuloista. Tästä osuudesta maksetaan pääomatuloveroa yllä mainitun säännön mukaisesti. Kuinka monta prosenttia veroa henkilö maksaa osinkotulostaan, kun osingon määrä on 41700,23 euroa? [S2015, 14]

E2

**32.** Yksisuuntaisella vuoristotiellä olevan tunnelin suuaukko on funktion $f(x) = -0{,}8x^2 + 0{,}8x + 4{,}8$ kuvaajan $x$-akselin yläpuolisen osan muotoinen. Koordinaatiston yksikkönä on metri.

**a)** Kuinka leveä tunneli on?

**b)** Kuinka korkea tunneli on korkeimmalta kohdalta?

**c)** Mikä on tunnelin suuaukon muotoa kuvaavan funktion symmetria-akselin yhtälö?

**d)** Tunneliin ajaa kuorma-auto, jonka leveys on 260 cm ja korkeus 380 cm. Mahtuuko kuorma-auto ajamaan tunnelista?

**33.** Auton jarrutusmatkaa $s$ metreinä kuvaa funktio $s(x) = 0{,}25x + 0{,}01x^2$, jossa $x$ on auton nopeus kilometreinä tunnissa.

**a)** Laske jarrutusmatka, kun auton nopeus on 50 km/h.

**b)** Jos nopeus kasvaa kaksinkertaiseksi nopeudesta 50 km/h nopeuteen 100 km/h, kuinka paljon jarrutusmatka pitenee?

**c)** Kuinka kovaa voi autolla ajaa, jos jarrutusmatka saa olla korkeintaan 30 m?

**34.** Jos jäätelötötterön hinta on $x$ €, sitä myydään hellepäivänä $443 - 42x$ kappaletta. Jäätelön enimmäishinta on 3,00 €/kappale.

**a)** Kuinka suuret ovat myyntitulot, jos jäätelön kappalehinta on 2,40 €?

**b)** Mikä on jäätelön kappalehinnan oltava, jotta jäätelön myynnistä saatavat tulot olisivat 570,00 €?

**35.** Torikauppias on havainnut, että normaalina arkipäivänä hän myy 700 kg perunoita, kun kilohinta on 2,00 €. Jokainen 10 sentin korotus kilohinnassa laskee päivän myyntiä 40 kg.

**a)** Perunoiden kilohintaa kuvaa lauseke $2{,}00 + 0{,}10x$. Muodosta ja sievennä funktio $m$, joka kuvaa päivän myyntituloa euroina.

**b)** Laske funktion avulla myyntitulo, kun $x = 4$.

**c)** Piirrä laskimella funktion $m$ kuvaaja ja määritä kuvaajan avulla hinta, jolla saadaan korkein myyntitulo.

E3

**36.** Kännykkäliittymän A kuukausimaksu on 3,50 euroa ja puhelumaksu 0,09 euroa minuutilta. Kännykkäliittymässä B ei ole kuukausimaksua, mutta puhelumaksu on 0,11 euroa minuutilta.

**a)** Muodosta funktiot $A(x)$ ja $B(x)$, jotka kuvaavat kummankin puhelinliittymän puhelinlaskun suuruutta kuukaudessa, kun $x$ on puheaika minuutteina.

**b)** Piirrä molempien funktioiden kuvaajat samaan koordinaatistoon. Päättele kuvaajien perusteella, kumpi liittymä kannattaa valita, jos kuukausittainen puheaika on 200 minuuttia.

**c)** Millä puheajalla liittymien A ja B kuukausilaskut ovat yhtä suuret?

**37.** Bensiinikäyttöisen auton ja vastaavan dieselmoottorilla varustetun auton polttoaineen kulutukset ovat 7,9 ja 5,4 litraa sadalla kilometrillä. Oletetaan bensiinin litrahinnaksi 1,371 euroa ja dieselpoltttoaineen 1,172 euroa. Halvan polttoainehinnan vastapainoksi dieselautosta on maksettava vuotuinen dieselvero, joka esimerkin autossa on 381 euroa.

**a)** Esitä autojen vuotuiset kustannukset ajokilometrien funktioina ja piirrä funktioiden kuvaajat samaan koordinaatistoon, kun vuodessa ajetaan enintään 30 000 km.

**b)** Kuinka paljon vuodessa dieselautolla on vähintään ajettava, jotta dieselautolla ajaminen olisi bensiinikäyttöistä autoa edullisempaa? [mukailtu S2001, 6]

**38.** Salli ja Olli valmistavat makeita ja suolaisia muffinsseja ylioppilasjuhliin. Yhden makean muffinssin valmistamiseen tarvitaan $\frac{1}{4}$ dl jauhoja ja $\frac{1}{12}$ dl maitoa. Yhden suolaisen muffinssin valmistamiseen tarvitaan puolestaan $\frac{1}{3}$ dl jauhoja ja $\frac{1}{6}$ dl maitoa. Kuinka monta makeaa ja kuinka monta suolaista muffinssia Salli ja Olli valmistavat, kun heiltä kuluu yhteensä 39 dl jauhoja ja 17 dl maitoa?

**39.** Toisen asteen polynomifunktion $f$ kuvaajana on paraabeli $y = ax^2 + bx - 48$. Huippu on pisteessä $(3, -75)$. Paraabeli kulkee lisäksi pisteen $(1, -63)$ kautta. Määritä kertoimet $a$ ja $b$.

E4

**40.** Koulun tiedeprojektissa tutkittiin valaistusvoimakkuuksia erilaisissa tilanteissa.

**a)** Yksi työryhmä tutki lampun tehon vaikutusta valaistusvoimakkuuteen. Työryhmä huomasi, että lampun valaistusvoimakkuus oli suoraan verrannollinen lampun tehoon. Kun lampun teho oli 40 W, valaistusvoimakkuudeksi saatiin 75 luksia (lx). Kuinka suuri oli lapun teho, kun valaistusvoimakkuus oli 130 lx?

**b)** Toinen työryhmä tutki valohoitolampun valaistusvoimakkuutta. Kun valaistusvoimakkuus mitattiin 0,40 metrin päässä lampusta, voimakkuus oli 2400 luksia (lx). Kuinka suuri oli valaistusvoimakkuus 1,5 metrin päässä lampusta, kun valaistusvoimakkuus on kääntäen verrannollinen mittausetäisyyden neliöön?

**c)** Muodosta kääntäen verrannollisuutta kuvaava yhtälö, kun mittausetäisyyttä merkitään kirjaimella $x$ ja valaistusvoimakkuutta kirjaimella $y$. Mikä on verrannollisuuskerroin?

**41.** Santeri saa palkkaa kolmen tunnin mainosten jaosta 65 €. Palkan määrä $y$ (€) on suoraan verrannollinen työtuntien määrään $x$.

**a)** Muodosta riippuvuutta kuvaava yhtälö ja määritä sen perusteella verrannollisuuskerroin.

**b)** Kuvaa riippuvuutta koordinaatistossa. Ratkaise kuvaajan avulla, paljonko Rebekka saa palkkaa 4,2 tunnin mainosten jaosta.

**42.** Elmo maalasi kesämökin seinää. Maalia kului 0,25 l/m$^2$. Maalin menekki on suoraan verrannollinen seinäpinta-alaan.

**a)** Kuinka paljon maalia kului sivuseinään, jonka ala oli 780 m$^2$?

**b)** Muodosta verrannollisuutta kuvaa yhtälö, kun $x$ on seinän pinta-ala ja $y$ on maalin määrä. Mikä on verrannollisuuskerroin?

**43.** Painoindeksin kehitti belgialainen Adolphe Quételet jo 1800-luvulla. Painoindeksi $y$ on kääntäen verrannollinen henkilön pituuden $x$ (m) neliöön. Eemeli ja Sameli painavat saman verran. Eemelin pituus on 1,80 m ja hänen painoindeksinsä on 23,1. Samelin painoindeksi on 21,2. Määritä Samelin pituus senttimetrin tarkkuudella.

**44.** Kaarteessa auton keskeiskiihtyvyys $a$ lasketaan kaavalla $a = \frac{1}{r}v^2$, jossa $r$ on ympyäradan säde ja $v$ auton nopeus. Jos auton nopeus on 16,7 m/s, keskeiskiihtyvyys on 1,26 m/s$^2$.

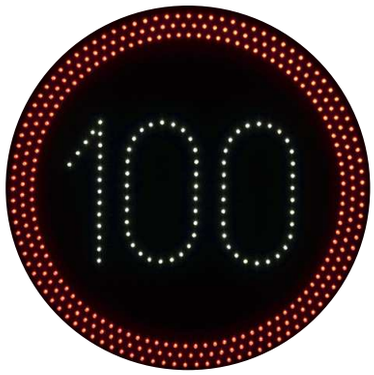
**a)** Laske tilanteessa vakiona pysyvä ympyäradan säde.

**b)** Keskeiskiihtyvyys on suoraan verrannollinen nopeuden neliöön. Laske auton nopeus, jos keskeiskiihtyvyys on 0,85 m/s$^2$.

**c)** Merkitään nopeutta kirjaimella $x$ ja keskeiskiihtyvyyttä kirjaimella $y$. Havainnollista verrannollisuutta koordinaatistossa.

**45.** Talon lämmityskustannukset pakkasella ovat suoraan verrannolliset sisä- ja ulkolämpötilojen väliseen erotukseen. Ulkolämpötilan ollessa –2,0 °C ja sisälämpötilan 22,0 °C sisälämpötila pudotetaan 21,0 °C:seen. Kuinka monella prosentilla talon lämmityskustannukset tällöin pienenevät? [S2006, 6]

**46.** Eräällä tieosuudella käytetään kesällä ja talvella erilaisia nopeusrajoituksia. Talvinopeudella matkaan kuluu 15 minuuttia ja kesänopeudella 3 minuuttia vähemmän, kun ajetaan maksiminopeuksilla. Mikä talvinopeusrajoitus on silloin, kun kesänopeus on 20 km/h korkeampi kuin talvinopeus? [K2015, 7]




**47.** Elmo ja Axel palaavat juhlista samalla taksilla. Elmon kotimatkan pituus on 7,5 km ja Axelin 12,5 km. Taksimatkan hinta on 36 €. Matkan hinta jaetaan kotimatkojen suhteessa. Kuinka paljon Axel maksaa matkastaan?

**48.** Kotimaisen meetvurstin rasvapitoisuus on 36 painoprosenttia. Kuinka monta prosenttia rasvaa meetvurstista pitää vähentää, jotta tuotteen uudeksi rasvapitoisuudeksi tulee 30 painoprosenttia? [S2015, 7]

# 6.3 Monivalintatehtävät

Seuraavat monivalintatehtävät on tarkoitus tehdä täysin ilman laskinta. Voit käyttää paperia apuna laskutoimitusten suorittamisessa tai yhtälöiden ratkaisemisessa. Vastausvaihtoehdoista vain yksi on oikein.

Monivalintatehtävät on tarkoitettu nopeaan kertaamiseen. Niiden avulla on helppo huomata, jos kirjan jokin osa-alue vaatii vielä lisää harjoittelua.

**1.** Mikä seuraavista ei ole lauseke?

**a)** $2x - 4$

**b)** $(x - 2)^2 - 4$

**c)** $x^2 = 4$

**2.** Mikä on polynomin $p(x) = 5x^6 + 3x + 1$ asteluku?

**a)** 1

**b)** 5

**c)** 6

**3.** Olkoon $P(x) = -x^2 - x$. $P(-2)$ on tällöin

**a)** $-2$

**b)** 6

**c)** $-6$.

**4.** Lauseke $3x - (-2x + 4)$ voidaan sieventää muotoon

**a)** $x - 4$

**b)** $5x - 4$

**c)** $5x + 4$.

**5.** Mikä on oikea ratkaisukaavan sievennys, kun ratkaistaan yhtälö $x^2 - 2x - 3 = 0$?

**a)** $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{0}}{2}$

**b)** $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{-8}}{2}$

**c)** $x = \dfrac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$

**6.** Mikä seuraavista on yhtälön $(3x + 2)^2 - 1 = 0$ ratkaisu?

**a)** 1

**b)** 0

**c)** $-1$

**7.** Yhtälöllä $x(4x - 1) = 0$ on

**a)** nolla ratkaisua

**b)** yksi ratkaisu

**c)** kaksi ratkaisua.

**8.** Tutki seuraavaa taulukkoa.

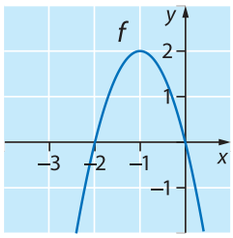
| *a* | *b* |
|---|---|
| 8 | 3 |
| 24 | 1 |

Suureet $a$ ja $b$
**a)** ovat suoraan verrannollisia
**b)** ovat kääntäen verrannollisia
**c)** eivät ole verrannollisia.

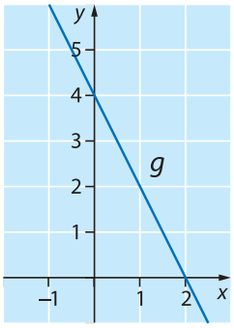
**9.** Yhtälön $\frac{x}{2} - \frac{x-1}{3} = 1$ ratkaisu on
**a)** $x = 8$
**b)** $x = 4$
**c)** $x = 1$.

**10.** Kun $x = -3$, lausekkeen $4x - 2x^2$ arvo on
**a)** $-30$
**b)** $-6$
**c)** 6.

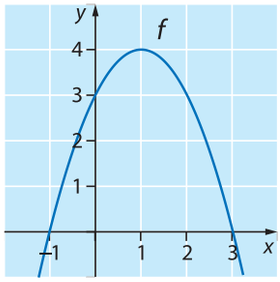
**11.** Päättele funktion $f$ kuvaajasta $f(-2)$.
**a)** $f(-2) = 0$
**b)** $f(-2) = -2{,}5$
**c)** $f(-2) = 2$




**12.** Päättele kuvasta, millä muuttujan $x$ arvolla $g(x) = 2$.
**a)** $x = 2$
**b)** $x = 0$
**c)** $x = 1$




**13.** Tutki funktion $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ kuvaajaa. Ratkaise kuvaajan avulla $f(x) = 0$.
**a)** $x = 1$
**b)** $y = 3$
**c)** $x = -1$ tai $x = 3$



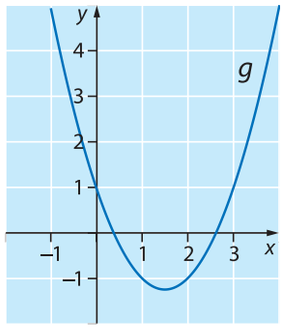

**14.** Mikä seuraavista on funktion $f(x) = x^2 - 3x$ nollakohta?
**a)** $-3$
**b)** 3
**c)** $-1$

**15.** Funktiolla $g(x) = -4 - x^2$
**a)** ei ole nollakohtia
**b)** on yksi nollakohta
**c)** on kaksi nollakohtaa.

**16.** Missä pisteessä funktio $f(x) = 8x + 24$ leikkaa $x$-akselin?
**a)** (0, 3)
**b)** (24, 0)
**c)** (−3, 0)

**17.** Suureet $x$ ja $y$ ovat suoraan verrannollisia. Jos $x = 5$, niin $y = 2$. Mitä on $y$, jos $x = 25$?
**a)** 50
**b)** 25
**c)** 10

**18.** Päättele funktion $g$ kuvaajan avulla, mikä seuraavista väitteistä ei ole totta.
**a)** $g(1) = 0$
**b)** $g(3) = 1$
**c)** $g(2) = -1$




**19.** Kun erästä toisen asteen yhtälöä ratkaistiin ratkaisukaavaa käyttäen, saatiin

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 1}}{2 \cdot (-4)}.$$

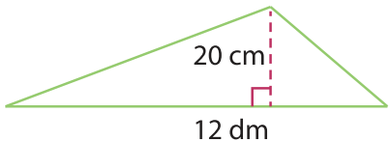
Mikä oli ratkaistava yhtälö?
**a)** $-4x^2 + 4x = 0$
**b)** $4x^2 - 4x + 1 = 0$
**c)** $-4x^2 + 4x + 1 = 0$

**20.** Puurima, jonka pituus on 30 cm, jaetaan kahteen osaan suhteessa 1:3. Tällöin lyhyemmän osan pituus on

**a)** 10 cm
**b)** 7,5 cm
**c)** 9 cm.

**21.** Määritä kuvan kolmion kannan ja korkeuden pituuksien suhde.

**a)** $\frac{12}{20}$
**b)** $\frac{10}{10}$
**c)** $\frac{6}{1}$




**22.** Yhtälöparin $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x - 5 \end{cases}$ ratkaisu on

**a)** $\begin{cases} x = -2 \\ y = -3 \end{cases}$
**b)** $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$
**c)** $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

**23.** Suureet $x$ ja $y$ ovat kääntäen verrannolliset. Mikä seuraavista yhtälöistä voi esittää niiden välistä riippuvuutta?

**a)** $y = 3x$
**b)** $yx = 3$
**c)** $y = 3x - 1$

**24.** Historian kurssilla järjestetään retki 200 km:n päässä sijaitsevaan museoon. Bussifirma veloittaa päivässä vuokraa 200 € ja 0,50 € jokaiselta ajokilometriltä. Funktio $f$ kuvaa bussimatkan kokonaiskustannuksia. Mikä seuraavista voi esittää funktion $f$ lauseketta?

**a)** $200x + 0{,}5$
**b)** $400 + 0{,}50x$
**c)** $200 + 0{,}50x$

**25.** Lauseke $(2x - 1)^2$ voidaan sieventää muotoon

**a)** $4x^2 - 4x + 1$
**b)** $4x^2 - 1$
**c)** $4x^2 + 1$.

**26.** Funktion $f(x) = -x^2 - 9$ kuvaaja

**a)** on ylöspäin aukeava paraabeli
**b)** leikkaa $x$-akselin kahdessa kohdassa
**c)** on alaspäin aukeava paraabeli.

**27.** Funktion $f(x) = -4x + 1$ kuvaaja leikkaa $y$-akselin pisteessä

**a)** $(-4, 0)$
**b)** $(0, 1)$
**c)** $(0, -4)$.

**28.** Funktioiden $f(x) = 3x + 2$ ja $g(x) = -3x$ kuvaajilla

**a)** ei ole yhtään leikkauspistettä
**b)** on yksi leikkauspiste
**c)** on äärettömän monta leikkauspistettä.

**29.** Suorakulmion kanta on 3 cm suurempi kuin korkeus. Suorakulmion ala on 24 cm$^2$. Millä yhtälöllä sivujen pituudet voitaisiin ratkaista?

**a)** $x \cdot 3x = 24$
**b)** $4(x - 3) = 24$
**c)** $x(x - 3) = 24$

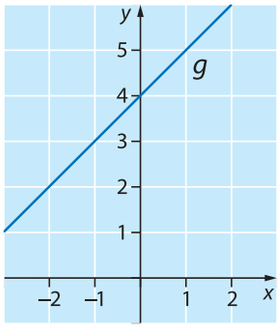
**30.** Suureet $x$ ja $y$ ovat kääntäen verrannolliset. Riippuvuus voidaan esittää seuraavan yhtälön avulla:

$y = \frac{c}{x}$, $c$ on verrannollisuuskerroin.

Jos suure $x$ saa arvon 10, niin $y$ saa arvon 120. Määritä verrannollisuuskerroin $c$.

**a)** $c = 0{,}12$
**b)** $c = 12$
**c)** $c = 1200$

**31.** Ratkaise funktion $g$ kuvaajan avulla yhtälö $g(x) = 2$.




**a)** $x = -2$
**b)** $x = 4$
**c)** $x = 0$

**32.** Mikä seuraavista funktion $f(x) = -2x$ kuvaajaan liittyvistä väitteistä ei ole totta?

**a)** Kuvaaja on laskeva suora.
**b)** Kuvaaja kulkee origon kautta.
**c)** Kuvaaja ei leikkaa $y$-akselia.

**33.** Kahden janan pituuksien suhde on 3:4. Janojen pituudet voivat tällöin olla esimerkiksi

**a)** 30 cm ja 70 cm
**b)** 90 cm ja 120 cm
**c)** 70 cm ja 210 cm.

**34.** Mikä seuraavista pisteistä on funktion $g(x) = -x^2 + 2x$ kuvaajalla?

**a)** $(-1, -3)$
**b)** $(-1, -2)$
**c)** $(-2, -2)$

**35.** Kokeen arvosanan $y$ ja pistemäärän $x$ välillä vallitsee seuraava lineaarinen riippuvuus: $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$.
Millä pistemäärällä kokeesta saa arvosanan 10?

**a)** 30
**b)** 25
**c)** 20

**36.** Funktion $f(x) = x^2 - 2x - 3$ kuvaaja on paraabeli. Funktiolla on kaksi nollakohtaa, $x = -1$ ja $x = 3$. Paraabelin huipun $y$-koordinaatti on

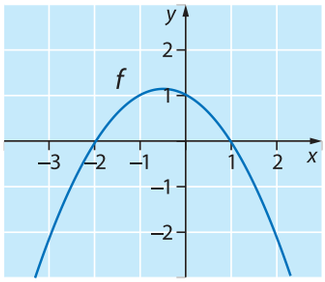
**a)** $-2$
**b)** $-4$
**c)** 1.

**37.** Puhelinmyyjän kuukausiansioita voidaan mallintaa funktiolla $f(x) = 0{,}40x + 650$, missä $x$ on soitettujen puhelujen määrä kuukauden aikana. Mikä seuraavista väitteistä ei pidä paikkaansa?

**a)** Jos myyjä soittaa 100 puhelua, hänen ansionsa ovat 690 €.
**b)** Myyjä ansaitsee 40 senttiä jokaisesta soittamastaan puhelusta.
**c)** Jos myyjä ei soita yhtään puhelua kuukauden aikana, hän ei saa lainkaan palkkaa.

**38.** Alla on esitetty funktion $f$ kuvaaja. Kuvaajan perusteella yhtälöllä $f(x) = 2$

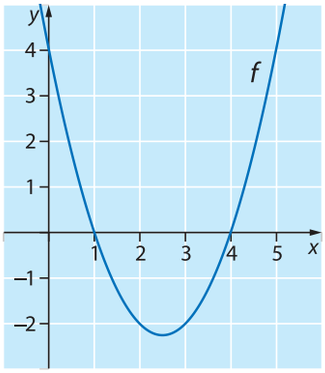
**a)** on kaksi ratkaisua
**b)** on yksi ratkaisu
**c)** ei ole ratkaisua.




**39.** Mikä on vakion $k$ arvo, kun yhtälön $2kx - 4 = 6$ ratkaisu on $x = 1$?

**a)** $k = 5$
**b)** $k = 2$
**c)** $k = 1$

**40.** Päättele kuvaajasta epäyhtälön $f(x) < 0$ ratkaisu.




**a)** $x < 1$ tai $x > 4$
**b)** $x < 1$
**c)** $1 < x < 4$

# Vastaukset

## 1.1 Lauseke ja laskutoimitukset

**1.** a) 5 b) $-6$

**2.** a) 24 b) $-4$
c) $\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$

**3.** a) $-4$ b) $\frac{11}{4} = 2\frac{3}{4}$

**4.** a) 12 b) $-\frac{1}{6}$

**5.** a) $-3x + 3$
b) $-8y + 9$
c) $3a^2 - 4a + 1$

**6.** a) $x^2 - 6x + 9$
b) $8x^2 - x + 3$

**7.** a) $x^3 + 3x - 5$
b) $-3a^2 - a - 3$
c) $-x + 2$

**8.** $P(x) - R(x) = 4x^2 - x - 4$

**9.** a) $15a$ b) 18 kg
c) $-14m^2$

**10.** a) $35a$ b) $-18x + 12$
c) $-3a^2 + 18a - 3$

**11.** a) $-10t + 6$
b) $-5t^4 + 3t - 1$
c) $\frac{3}{2}k - 1$

**12.** a) $18x - 24$
b) $27x - 12$

**13.** a) $30x - 2$
b) $50x - 32$

**14.** a) $-x^2 + x + 4$
b) $3x^2 - 8x + 8$

**15.** a) $R(x) = 275x^2 - 279x - 752$
b) $P(-14) = 2898$
$Q(12) = -745$
$R(-9) = 24\,034$

**16.** $R(x) = -152x^2 + 284x - 220$
$H(x) = -798x^2 - 384x - 750$

| $x = -23$ | $x = \frac{2}{5}$ | $x = 35$ |
|---|---|---|
| 958 | $-\frac{7}{5}$ | −1420 |
| 10 416 | $\frac{426}{25} = 17\frac{1}{25}$ | 22 770 |
| −87 160 | $-\frac{3268}{25} = -130\frac{18}{25}$ | −176 480 |
| −431 724 | $-\frac{18\,102}{25} = -724\frac{2}{25}$ | −964 860 |

**17.** a) $85x$ b) 127,5 km

**18.** a) $K(x) = 5{,}90 + 0{,}19x$
b) 28,70 €

**19.** a) $R(x) = 73{,}37x + 25{,}50$
b) 392,35 €

**20.** a) $40 + 28(x - 1) = 28x + 12$
b) 152 €

**21.** a) $P(x) = 24x - 28$
b) 44

**22.** a) $5{,}50x + 220$
b) 280,50 €

**23.** a) $-61$ b) $-\frac{1}{3}$

**24.** a) $-4y - 4$ b) $-12$
c) $7x + 7$ d) $-8x + 5$

**25.** $-x^2 + 6x$
Polynomin arvo on −7, kun $x = -1$.

**26.** a) BG: $85 + 5{,}50x$
CityTeam: $25 + 7{,}50x$
b) Kuntoklubi BG:tä (261 €)

**27.** a) 3,0 %
b) 118–137

## 1.2 Polynomien tulo

**28.** a) $6x^5$
b) $-12x^5 - 9x^4 + 15x^3$

**29.** a) $42x^8$ b) $-40x^6$
c) $18x^{10}$ d) $4x^5$

**30.** a) $5x^3 - 30x^2 + 10x$
b) $-6x^4 + 3x^3 + 2x^2$
c) $-6x^7 + 3x^5 - 3x^4$
d) $2x^5 - 3x^4 + x^3$

**31.** a) $\frac{1}{6}x^6$
b) $\frac{1}{4}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{8}x^3$

**32.** a) $8x^2 + 22x + 15$
b) $-5x^3 + 7x^2 + 8x - 4$
c) $9x^2 - 24x + 16$
d) $4x^2 - 36$

**33.** a) $18x^2 + 24x + 8$
b) $2x^3 + x^2 + 6x + 3$
c) $2x^2 - 5x - 7$
d) $x^4 - 7x^2 + 10$

**34.** a) $-8x^2 + 26x - 15$
b) $-3x^4 - 10x^2 + 8$
c) $-7x^3 + 21x^2 + 2x - 6$
d) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - 2$

**35.** a) $18x^3 - 36x^2 + 7x + 5$
b) $\frac{1}{2}x^3 + \frac{23}{6}x^2 - \frac{29}{24}x + 1$

**36.** a) $16x^2 + 16x + 4$
b) $4x^2 - 9$
c) $x^4 - 16x^2 + 64$

**37.** a) $4x^2 - 2x + 12$
b) $3x^4 - 6x^3 - 24x^2$

**38.** a) $3x^2 + 21x - 5$
b) $-7x^2 + 44x - 32$

**39.** a) $-9x^3 + 15x$
b) $x^2 + 3x - 45$

**40.** a) $8x^3 + 6x^2 - 14x$
b) $-9x^3 - 27x^2 + 90x$
c) $12x^4 - 44x^3 + 40x^2$
d) $-x^4 - \frac{5}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$

**41.** a) $x^{3m-3} + x^{4m} - x$
b) $8x^3$

**42.** **a)** $M(x) = -150x^2 + 5000x + 65\,000$
**b)** 79 464,00 €

**43.** **a)** $250 - x$
**b)** $A(x) = -x^2 + 250x$
**c)** 12 300 m$^2$

**44.** **a)** $H(x) = -22x^2 + 140x + 3600$
**b)** 3648,00 €

**45.** **a)** $-12x^8$
**b)** $18x^5 - 27x^4 + 54x^3$

**46.** **a)** $15x^2 + 58x + 48$
**b)** $6x^2 - 13x - 5$
**c)** $-2x^4 + 17x^2 - 21$
**d)** $\frac{2}{5}x^2 + \frac{2}{5}x - 12$

**47.** **a)** $33x^2 - 2x - 8$
**b)** $-40x^6 + 88x^5 - 16x^4$

**48.** **a)** $49x^2 - 14x + 1$
**b)** $-25x^2 + 16$

**49.** **a)** $P(x) = -400x^2 + 1700x + 35\,250$
**b)** 35 650 €
**c)** 31 204 €

## 2.1 Ensimmäisen asteen yhtälö

**50.** **a)** on **b)** ei

**51.** ei

**52.** **a)** $x = 5$ **b)** $x = -3$
**c)** $x = 18$

**53.** **a)** $x = -\frac{2}{3}$ **b)** $x = -1$

**54.** **a)** $x = -3$ **b)** $x = 1$

**55.** **a)** $a = -\frac{8}{9}$ **b)** $c = \frac{5}{8}$

**56.** **a)** Yhtälöllä ei ole ratkaisua.
**b)** Kaikki luvut ratkaisuja.

**57.** $k = \frac{13}{4}$

**58.** $a = 2$

**59.** $k = -\frac{6}{5}$

**60.** 20, 21, 22

**61.** korkeus 6 cm ja kanta 9 cm

**62.** Petra 24 v, Lilli 6 v

**63.** **a)** $x = 6$ **b)** $x = -\frac{1}{3}$

**64.** **a)** $x = \frac{4}{15}$ **b)** $x = -\frac{2}{11}$

**65.** **a)** $x = \frac{1}{3}$ **b)** $x = 1$

**66.** Kaikki luvut ratkaisuja.

**67.** **a)** 60 €
**b)** Budjetti: $60 + 0{,}2x$
Hertta: $40 + 0{,}3x$
Kun ajetaan yli 200 km, kannattaa valita Hertta.

**68.** 1058,82 €

**69.** **a)** $250 + 80x$ **b)** 13

**70.** **a)** $x = 2$ **b)** $x = -\frac{2}{3}$

**71.** **a)** $x = -3$ **b)** ei ratkaisua

**72.** $a = -\frac{9}{8} = -1\frac{1}{8}$

**73.** $x = 2$

**74.** $p = \frac{8}{7} = 1\frac{1}{7}$

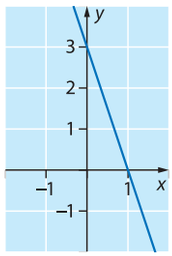
**75.** 28 opiskelijaa

## 2.2 Ensimmäisen asteen polynomifunktio

**76.** **a)** $f(0) = -3$, $f(2) = -1$
**b)** $x = 1$
**c)** $x = 3$
**d)** $x < 3$

**77.** **a)** 2 **b)** $x = 0$
**c)** $x = 2$ **d)** $x < 2$

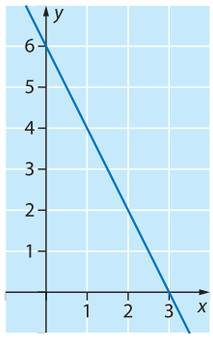
**78.** **a)** $f(-1) = 6$, $f(0) = 3$, $f(2) = -3$
**b)**



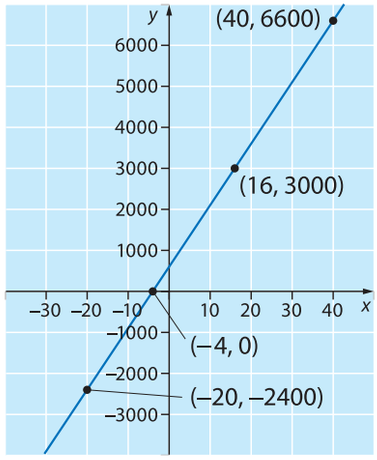

**c)** $x = 1$

**79.** **a)** nouseva
**b)** $(0, -6)$ **c)** $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

**80.** (0, 6) ja (3, 0)




**81.** **a)** $h(-20) = -2400$, $h(40) = 6600$
**b)** $x = 16$
**c)** $x = -4$




**82.** **a)** $x = 0$ ja 9,00 €
**b)** 15,00 €
**c)** 4,3 km

**83.** **a)** 9,7 cm
**b)** 7,3 h
**c)** Kun valoisia tunteja on 3,4 h tai vähemmän.

**84.** **a)** 81,4 vuotta
**b)** 7830 €
**c)** $e(0) \approx 76{,}0$
Malli ei toimi nollakohdan läheisyydessä, koska BKT ei voi käytännössä laskea arvoon nolla.

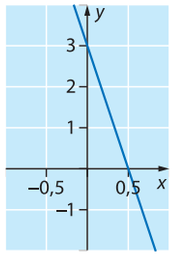
**85.** **a)** 1738 l
**b)** 18 °C
**c)** nollakohta $x \approx -25$
Malli ei ole järkevä nollakohdassa, koska kesäpäivänä lämpötila –25 °C on erittäin epätodennäköinen.

**86.** **a)** 9 **b)** 30 **c)** 15

**87.** **a)** 88 **b)** 196
**c)** Tällöin jänispopulaation koko olisi nolla, jolloin todennäköisesti myös jäniksiä syövien eläinten populaatioiden koot romahtaisivat.

**88.** **a)** $g(1) = 10$ ja $g(0) = 15$
**b)** $x = 2$ **c)** $x = 3$
**d)** $x > 3$

**89.** **a)** 27 **b)** $x = \frac{1}{2}$
**c)**




**90.** $a = \frac{3}{4}$

**91.** **a)** 48 kg **b)** 179 cm

**92.** **a)** 2,5 kg **b)** 2,6 l
**c)** $0 \le x \le 3$

## 2.3 Toisen asteen yhtälö

**93.** **a)** $x = -2$ tai $x = 4$
**b)** $x = -1$ tai $x = \frac{1}{3}$

**94.** **a)** $x = 1$ tai $x = 2$
**b)** $x = -\frac{1}{2}$ tai $x = \frac{2}{3}$

**95.** **a)** $x = 0$ tai $x = 6$
**b)** $x = 1$

**96.** **a)** $x = \pm 3$
**b)** $x = \pm 5$

**97.** **a)** $x = 3$ **b)** $x = -1$

**98.** **a)** ei ratkaisua
**b)** $x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$

**99.** **a)** $x = -2$ tai $x = 5$
**b)** ei ratkaisua

**100.** **a)** $x = 1$ tai $x = 3$
**b)** $x = \frac{-2 \pm \sqrt{28}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}$

**101.** **a)** $s = -1$ tai $s = 3$
**b)** $t = 0$ tai $t = 3$

**102.** **a)** $x = 0$ tai $x = \frac{2}{3}$
**b)** ei ratkaisua

**103.** **a)** $x = -3$ tai $x = 1$
**b)** $y = \frac{1}{2}$

**104.** $x = 0$ ja $x = 1$

**105.** $x = -2$ tai $x = \frac{4}{3}$

**106.** $t = -2$ tai $t = \frac{4}{5}$

**107.** Jos $a = 1$, yhtälön toinen ratkaisu on $t = -\frac{1}{3}$.
Jos $a = 2$, yhtälön toinen ratkaisu on $t = -\frac{1}{6}$.

**108.** 45 ja 46 tai –46 ja –45

**109.** 25 ja 27 tai –27 ja –25

**110.** **a)** $x = -\frac{1}{3}$ tai $x = 5$
**b)** $x = 0$ tai $x = \frac{1}{7}$
**c)** $x = -\frac{1}{3}$ tai $x = 0$

**111.** **a)** $x = 0$ tai $x = 4$
**b)** $x = -2$ tai $x = 4$

**112.** **a)** $x = 0$ tai $x = \frac{1}{4}$
**b)** $x = 0$ tai $x = \frac{1}{2}$

**113.** **a)** $x = 0$ tai $x = \frac{1}{8}$
**b)** $x = 0$ tai $x = -\frac{5}{3}$

**114.** **a)** $x = \pi$ tai $x = -\sqrt{2}$
**b)** $x = \frac{1}{2}$

**115.** **a)** $x = \pm 5$ **b)** ei ratkaisua
**c)** $x = \pm\sqrt{2}$

**116.** **a)** $t = \pm\sqrt{18} = \pm 3\sqrt{2}$
**b)** $x = \pm\sqrt{2}$

**117.** **a)** $x = \pm\frac{\sqrt{21}}{3}$
**b)** ei ratkaisua

**118.** **a)** $p = \pm 1$ **b)** $p = \pm\sqrt{3}$

**119.** $x = 0$ tai $x = -\frac{5}{2}$

**120.** $a = 2$

**121.** **a)** $x = -\frac{1}{2}$ tai $x = 2$
**b)** $x = -4$
**c)** ei ratkaisua

**122.** **a)** $x = -2$ tai $x = \frac{1}{4}$
**b)** $x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$

**123.** **a)** $x = 0$ tai $x = 2$
**b)** $x = \pm 2$

**124.** $x = \frac{1}{2}$

**125.** **a)** $x = 0$ tai $x = -\frac{1}{3}$
**b)** $x = \pm\frac{3}{4}$
**c)** $x = -4$ tai $x = 1$

**126.** $p = 2$, jolloin yhtälön toinen ratkaisu on $x = 1$.

**127.** korkeus 6,4 cm
ja kanta 9,9 cm

## 2.4 Toisen asteen polynomifunktio

**128.** **a)** $x = -5$ ja $x = 2$
**b)** $x = -8$ tai $x = 5$
**c)** $x < -5$ tai $x > 2$

**129.** **a)** (–3, 0), (4, 0) ja (0, –6)
**b)** –3
**c)** $f(3) = -3$
**d)** $x = -4$ tai $x = 5$
**e)** ei ratkaisua

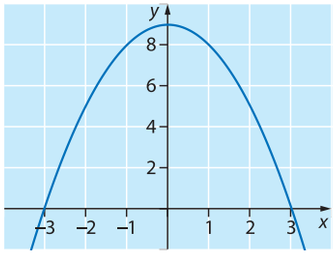
**130.** **a)** $f(4) = 3$
**b)** $f(1) = 0$
**c)** $x = 0$ tai $x = 4$
**d)** $x = 2$
**e)** $1 < x < 3$

**131.**

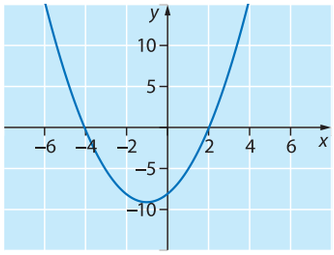
| Paraabelin aukeamissuunta |
|---|
| ylöspäin |
| ylöspäin |
| alaspäin |
| ylöspäin |

**132.** **a)** ylöspäin
**b)** $x = -1$ tai $x = \frac{1}{2}$
**c)** $(0, -1)$

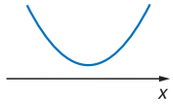
**133.** **a)** alaspäin
**b)** $(0, 9)$, $(3, 0)$ ja $(-3, 0)$
**c)**



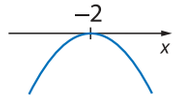

**134.**



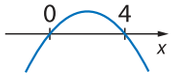

**135.** **a)** ei ratkaisua




**b)** $x = -2$




**c)** $x = 0$ ja $x = 4$




**136.** **a)** $(-5, 0)$, $(3, 0)$
**b)** $(-1, -5)$
**c)** $x = -1$

**137.** **a)** $(4, 1)$
**b)** $x = 4$

**138.** **a)** ylöspäin
**b)** $(0, -12)$, $(2, 0)$ ja $(-2, 0)$
**c)** $(0, -12)$
**d)** $x = 0$

**139.** nollakohdat $x = \frac{1}{2}$ ja $x = \frac{3}{2}$, huippu $(1, 1)$

**140.** **a)** maksimipiste $(1, 3)$
**b)** minimipiste $(-2, -10)$

**141.** $x = 12$

**142.** **a)** $(0, 12)$
**b)** $x = -4$ ja $x = 6$
**c)** 4,5
**d)** $x \approx -3{,}2$ tai $x \approx 1{,}2$

**143.** **a)** $f(0) = 5$, $f(-10) = -765$
**b)** $x \approx -0{,}3$ tai $x \approx 3{,}1$
**c)** $x \approx -1{,}1$ tai $x \approx 3{,}9$

**144.** minimipiste $(1{,}3;\ 10{,}9)$

**145.** **a)** 5 **b)** ei
**c)** $(1{,}7;\ -0{,}3)$

**146.** **a)** 2,2 m **b)** 6 m

**147.** **a)** 78 m **b)** 16 s

**148.** **a)** 970 mg/cm$^3$
**b)** 960 mg/cm$^3$
**c)** 50,5 °C
**d)** 5 °C

**149.** **a)** $3x(3x + 3) = 9x^2 + 9x$
**b)** 51 ja 54 tai −54 ja −51

**150.** **a)** $M(x) = 28{,}7x - 0{,}69x^2$
**b)** 26,24 €/kg

**151.** **a)** $A(x) = 4x^2 + 460x + 13\,000$
**b)** 5,2 cm

**152.** **a)** $5{,}5 - x$
**b)** $A(x) = 5{,}5x - x^2$
**c)** 7,5 m$^2$
**d)** 1,7 m × 3,8 m

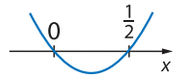
**153.** **a)** $f(x) = 0{,}5x^2 + 0{,}9x$
**b)** 0,72 m$^2$
**c)** 0,45 m ja 2,25 m

**154.** **a)** $T(x) = -50x^2 + 900x + 38\,000$
**b)** 40 800 €
**c)** 14,50 €

**155.** **a)** $f(x) = -5x^2 + 42{,}5x + 855$
**b)** 29,16 €
**c)** 10,00 € – 28,69 €

**156.** **a)** $x = -5$ ja $x = 1$
**b)** $f(2) = -3$
**c)** $x = -6$ tai $x = 2$
**d)** ei ratkaisua
**e)** $-5 < x < 1$
**f)** $(-2, 4)$
**g)** $x = -2$

**157.** **a)** ylöspäin
**b)** $(0, 0)$ ja $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$
**c)**




**158.** **a)** $x = 2$ ja $x = 4$
**b)** $(3, -1)$
**c)** $x = 3$

**159.** **a)** 485 €
**b)** 3,81 €
**c)** 2,35 €, jolloin myyntitulot 486,92 €

**160.** **a)** $f(x) = 132x - 6x^2$
**b)** 19,33 €
**c)** $g(y) = -0{,}2y^2 - 6y + 1400$ ja 1300 kg

## 3.1 Yhtälöpari ja leikkauspisteet

**161.** **a)** $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$
**b)** $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$ tai $\begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$

**162.** **a)** on **b)** ei

**163.** on

**164.** **a)** $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = 17 \\ y = 5 \end{cases}$

**165.** **a)** $\begin{cases} x = -1 \\ y = -7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$

**166.** $(0, 1)$

**167.** $(2, 6)$

**168.** **a)** Ratkaisuja ovat suoran $y = -x + 3$ kaikki pisteet.

**b)** ei ratkaisua

**169.** **a)** ei ratkaisua

**b)** $\begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{1}{6} \end{cases}$

**170.** **a)** $x = 3$ ja $y = 3$

**b)** $x = 3$ ja $y = 5$

**171.** (3, 2) ja (2, 0)

**172.** **a)** $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \end{cases}$ tai $\begin{cases} x = -1 \\ y = -8 \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} x = -1 \\ y = 5 \end{cases}$

**173.** **a)** $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$ tai $\begin{cases} x = 3 \\ y = -9 \end{cases}$

**b)** ei ratkaisua

**174.** **a)** Kaikissa suoran $y = 5x - 2$ pisteissä.

**b)** (–5, –27) ja (2, 8)

**175.** (–1, 2) ja (5, 44)

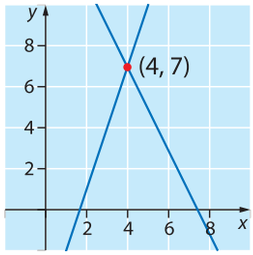
**176.** **a)** (–4, –39) ja (–1, –12)

**b)** (0, –7) ja $\left(\frac{1}{2}, -\frac{21}{4}\right)$

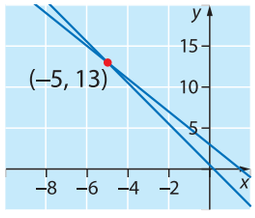
**177.** **a)** $\begin{cases} 6a + 4b = 6 \\ a = b - 4 \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases}$

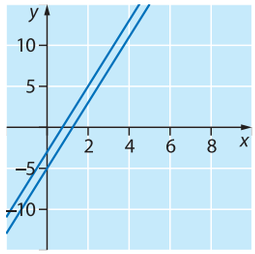
**178.** **a)** $x = 4$, $y = 7$



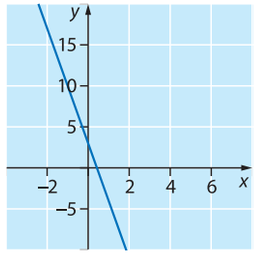

**b)** $x = -5$, $y = 13$



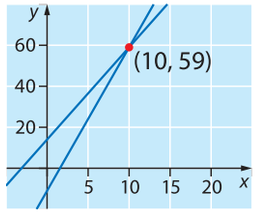

**179.** **a)** Yhtälöparilla ei ole ratkaisua (suorat ovat yhdensuuntaiset).



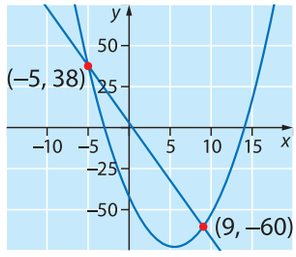

**b)** Ratkaisuja ovat kaikki suoran $y = -7x + 3$ pisteet.




**180.** (10, 59)




**181.** (–5, 38) ja (9, –60)




**182.** $\begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$

**183.** **a)** Ratkaisuja ovat kaikki suoran $y = \frac{2}{3}x - 1$ pisteet.

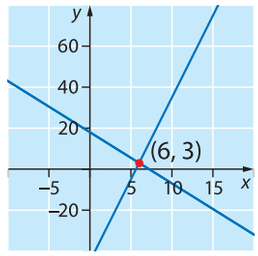
**b)** Yhtälöparilla ei ole ratkaisua.

**184.** **a)** (4, –1)

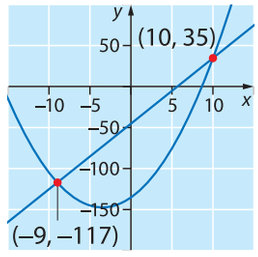
**b)** (3, –3) ja $\left(-\frac{1}{2}, -10\right)$

**185.** $\begin{cases} x = 6 \\ y = -70 \end{cases}$ tai $\begin{cases} x = -2 \\ y = -14 \end{cases}$

**186.** **a)** (6, 3)




**b)** (–9, –117) ja (10, 35)




## 3.2 Yhtälöpari sovellustehtävissä

**187.** **a)** $\begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} x = 9 \\ y = -12 \end{cases}$

**188.** $\begin{cases} x = \frac{7}{5} \\ y = \frac{6}{5} \end{cases}$

**189.** **a)** $\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

**190.** $a = -7$

**191.** 120 aikuisten ja 180 lasten lippua

**192.** 12 lehmää ja 20 kanaa

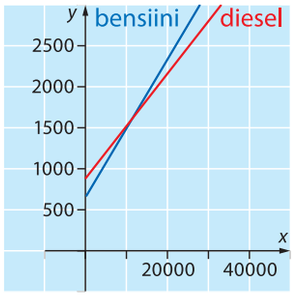
**193.** kahvi 2 € ja munkki 1,5 €

**194.** 72 kakkua ja 104 piirakkaa

**195.** 12 aikuista ja 28 lasta

**196.** 22 litraa maalia A ja 12 litraa maalia B

**197.** **a)** bensiini: $y = 0{,}084x + 650$
diesel: $y = 0{,}064x + 880$




**b)** Kannattaa valita bensiiniauto.
**c)** 11 500 km

**198.** **a)** Pinnistys: $y = 6x$
Ponnistus: $y = 2{,}8x + 120$
**b)** vähintään 38 kertaa

**199.** **a)** $A(x) = 0{,}1x - 30{,}1$
$B(x) = 0{,}15x - 60{,}1$
**b)** 600 min
**c)** 20 €

**200.** **a)** $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} x = -\frac{7}{2} \\ y = -2 \end{cases}$

**201.** 1 €:n kolikoita 9 kpl
ja 2 €:n kolikoita 15 kpl

**202.** 80 g banaania
ja 120 g appelsiinia

**203.** **a)** maalämpö
$y = 750x + 16\,500$,
öljylämmitys
$y = 1800x + 6500$
**b)** 10 vuotta

## 4.1 Suhde ja verranto

**204.** **a)** 2:1 **b)** 2:25 **c)** 25:1

**205.** Aatu 100 €, Artturi 140 €

**206.** 150 cm ja 250 cm

**207.** Steve 0,9 milj. €,
Mark 0,6 milj. €
ja Bill 1,5 milj. €

**208.** 20 ja 28

**209.** **a)** $x = 8$ **b)** $x = 4$
**c)** $x = \pm 5$

**210.** **a)** $x = 5$ **b)** $x = 2$

**211.** **a)** $x = \frac{4}{3}$ **b)** $x = \pm 10$

**212.** **a)** $x = 0$ tai $x = \frac{1}{8}$
**b)** $x = -\frac{1}{2}$ tai $x = 2$

**213.** **a)** 7:4
**b)** 1,75-kertainen
**c)** 13:14

**214.** tiivistettä 2,8 dl ja vettä 22 dl

**215.** kyljet 49 m ja kanta 28 m

**216.** 1152 g

**217.** kanta 245 cm
ja korkeus 150 cm

**218.** 13,5 cm × 7,0 cm

**219.** kanta 36,0 cm
ja korkeus 63,0 cm

**220.** 90,0 cm

**221.** 2,0 mm

**222.** 57 cm

**223.** 16,2 cm

**224.** $a = \frac{9}{7}$

**225.** **a)** $x = \frac{2}{3}$ **b)** $x = 8$

**226.** **a)** $x = \pm 3$
**b)** $x = -2$ tai $x = 3$

**227.** **a)** kanta 10,2 cm
ja korkeus 15,2 cm
**b)** 170 m

**228.** Mirka 170 cm
ja Jonathan 185 cm

**229.** suuremman asunnon osuus
63 000 €, pienemmän
asunnon osuus 49 000 €

**230.** 20 cm

## 4.2 Suoraan verrannollisuus

**231.** **a)** eivät **b)** ovat

**232.** ovat

**233.** $x = 20$

**234.** vielä 10 min
(yhteensä peliaika 25 min)

**235.** **a)** 450 g
**b)** Ei, kastike riittää enintään
13 henkilölle.

**236.** 50-vuotias

**237.** 16 min

**238.** 5,8 kg

**239.** **a)** 2 h 7 min
**b)** 608 km

**240.** **a)** 29 min 10 s
**b)** 1800 m

**241.** 150 henkilöä

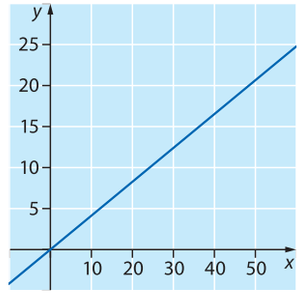
**242.** **a)** 1,9 s **b)** 142 cm

**243.** **a)** 80 km/h **b)** 135 %

**244.** **a)** 1300 J **b)** 9,5 m/s

**245.** **a)** 101 N **b)** 26 m/s$^2$
**c)** $k = 63{,}3$ ja $y = 63{,}3x$
**d)** 234 N

**246.** **a)** 10,7 cm
**b)** $y = \frac{31}{75}x \approx 0{,}413x$
**c)** 48,4 °C



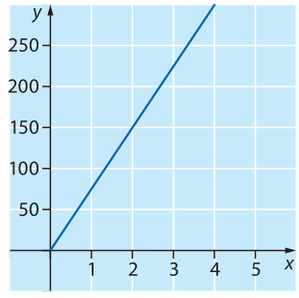

**247.** $y = 17\frac{1}{2}$

**248.** **a)** 2400 eurolla **b)** 1000 €

**249.** **a)** 24 m$^2$
**b)** 370 000 €

**250.** **a)** 63 wattia
**b)** 1,2 ampeeria

**251.** **a)** 128 g **b)** $y = 75x$
**c)** 3,1 cm



## 4.3 Kääntäen verrannollisuus

**252.** $y = \frac{6}{5}$

**253.** $b = 10$

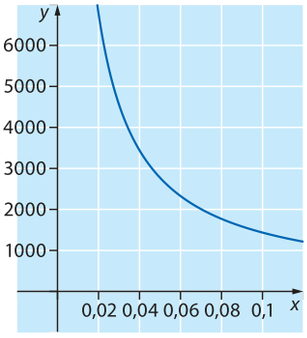
**254.** $x = 8$

**255.** 50 min

**256.** 8 tuntia

**257.** 52 $\text{cm}^3$

**258.** a)

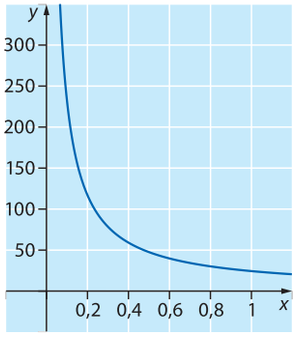



b) 3500 pascalia

c) 0,02 $\text{m}^2$ = 200 $\text{cm}^2$

**259.** a) $c = 24$

b)

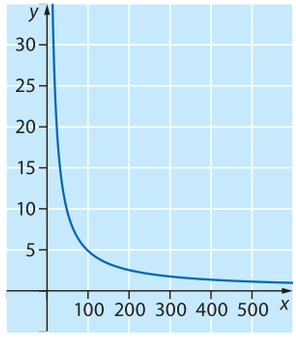



c) 0,08

**260.** a) $c = 490$

b) $y = \frac{490}{x}$

c)




**261.** a) 3,2 $\text{m/s}^2$

b) 16 s

**262.** 0,13

**263.** 55,8 tonnia

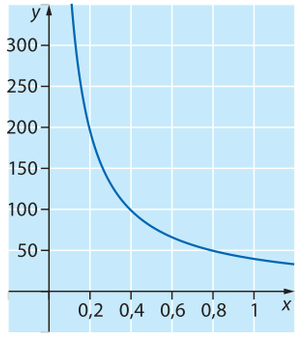
**264.** 1011 %

**265.** $x = \sqrt{5}$

**266.** 7 h 30 min

**267.** 1090 tuntia

**268.** a)




b) 49 m

c) 0,15

## 5.1 Murtolausekkeita

**269.** a) $4x + 2$ b) $5 - x$

c) $\frac{3x^2 - 6}{2}$

**270.** a) $2x - 3$ b) $\frac{2x + 5}{x - 3}$

c) $\frac{2}{x + 2}$

**271.** a) $\frac{x + 2}{x - 3}$ b) $\frac{2}{5}$

**272.** a) $\frac{2x + 6}{4 - x}$ b) $\frac{2}{3}$

**273.** a) $\frac{6}{7}$ b) $\frac{-6x - 3}{3x^2 + x}$

**274.** a) $\frac{5}{a}$ b) $\frac{5a}{6}$

**275.** $\frac{13x - 12y}{6}$

**276.** a) $\frac{-a^2 + 2a + 1}{2a}$

b) $\frac{1 - 2x}{x^2 - x}$

**277.** a) 12 b) $8x^2$

**278.** a) $\frac{x^2}{24}$ b) $\frac{2}{3}$

**279.** a) $\frac{-x - 3}{2x^2 + 3x}$ b) $\frac{1}{3x + 6}$

**280.** $\frac{2}{x^2 - 1}$

**281.** $\frac{2}{3}$

**282.** a) $\frac{1}{3}$ b) 1 c) $x^{2n}$

**283.** a) $\frac{x + 1}{2}$ b) $\frac{2x}{4x + 1}$

**284.** a) $\frac{x^2 - 2}{3x}$ b) 1

**285.** $a^2$

## 5.2 Muistikaavat

**286.** a) $4x^2 - 16$

b) $x^2 + 10x + 25$

c) $x^2 - 6x + 9$

**287.** a) $x^2 - 16$

b) $25x^2 - 1$

c) $x^4 - 4$

d) $36x^4 - 49$

**288.** a) $x^2 + 2x + 1$

b) $x^2 + 8x + 16$

c) $4x^2 + 4x + 1$

d) $25 + 30x + 9x^2$

**289.** a) $x^2 - 16x + 64$

b) $4 - 4x + x^2$

c) $36x^2 - 24x + 4$

d) $x^4 - 10x^2 + 25$

**290.** a) $16x^2 + 16x + 4$

b) $49 - 14x + x^2$

c) $25x^2 - 9$ d) $36 - x^2$

**291.** a) $x^4 - 16y^4$ b) $x^8 - x^4 + 81$

**292.** a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

b) $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$

## 5.3 Vastauksen tarkkuus

**293.** a) $5{,}2 \cdot 10^6$ b) $5{,}17 \cdot 10^6$

c) $5{,}170 \cdot 10^6$

**294.** a) 2,476 m b) 7,46 $\text{m}^2$

c) –65 300 d) 5000

**295.** a) 1 b) 4 c) 5

d) 3 e) 4 f) 5

**296.** a) 8,0 g b) 4,1 dm

**297.** a) 6,76 b) 4,95

**298.** 350 000 hiustenkuivaajaa

**299.** 630 autoa

**300.** a) 1900 h b) 830 % suurempi

## 5.4 Neliöjuuri

**301.** a) 7 b) 9 c) 11
d) 5 e) 12 f) 25

**302.** a) $3\sqrt{3}$ b) $-3\sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{7}}{8}$

**303.** a) $5\sqrt{5}$ b) $3\sqrt{6}$ c) $-9\sqrt{3}$

**304.** a) $2\sqrt{5}$ b) $2\sqrt{3}$ c) $6\sqrt{2}$

**305.** a) $\frac{\sqrt{5}}{4}$ b) $\frac{3}{7}$ c) 4

**306.** a) 13 b) 11 c) 7

**307.** a) $-\sqrt{6}$ b) $5\sqrt{2}+\frac{1}{5}$
c) $\pi-2$

**308.** a) 4 b) $4\sqrt{7}+11$
c) $2\pi-1$

**309.** –

## 6.1 Kurssin keskeiset asiat

**1.** a) $2x^2-2x-6$
b) $-4x+1$
c) $-15x^2+22x-8$
d) $-3x^2+11x-4$

**2.** a) $Q(x)=-2x^2+6x$
b) $Q(-3)=-36$
c) $x=0$ tai $x=3$

**3.** a) $x=\frac{1}{11}$ b) $x=-\frac{6}{5}$

**4.** a) $x=-4$ tai $x=-1$
b) $x=0$ tai $x=\frac{7}{3}$

**5.** a) $k=\frac{2}{3}$ b) $s=8$
c) ei ratkaisua

**6.** a) $x=-\frac{1}{16}$ b) $x=-\frac{1}{6}$

**7.** a) 1
b) esimerkiksi
$(x-1)(x+2)=0$
c) $a=4$

**8.** a) $x=0$ tai $x=\frac{1}{2}$
b) $\frac{3}{2}$
c) $x=-3$

**9.** $x=-3$ tai $x=1$

**10.** a) $x=0$ tai $x=4$
b) $x=-2$
c) 6

**11.** a) $g(1)=4$
b) $x=0$ tai $x=2$
c) $x=-1$ tai $x=3$
d) $-1<x<3$

**12.** a) ylös
b) $x=0$ tai $x=6$

**13.** nollakohdat: $x=-4$ tai $x=4$, huippupiste $(0, -48)$

**14.** a) $(-2, -9)$
b) $x=-2$

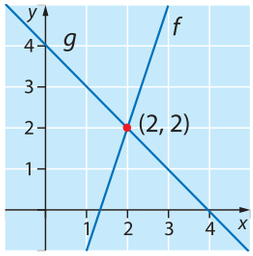
**15.** $(2, -5)$

**16.** $(-2, 9)$ ja $(3, -1)$

**17.** $k=2$

**18.** $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$

**19.** leikkauspiste (2, 2)




**20.** a) $a=\frac{16}{9}$ b) $b=6$

**21.** leveys 70 m, pituus 105 m

**22.** 600 ruotsinkielistä

**23.** 4000 asukasta

**24.** 80 cm × 200 cm

**25.** leveys 4 cm, korkeus 6 cm

**26.** 23 fasaania, 12 kaniinia

**27.** 20 pöytää, 60 tuolia

## 6.2 Matemaattisia malleja

**28.** a) vuokra-asunto $600x$, omistusasunto $150x+85\,000$
b) vuokra-asunto 72 000 €, omistusasunto 103 000 €
c) 15 vuotta 9 kuukautta

**29.** a) $K(x)=12{,}30x+12\,000$
b) 135 000 €
c) $V(x)=4{,}95x-12\,000$, koteloita tulee myydä vähintään 2425 kappaletta

**30.** a) $a(x)=0{,}0662x+4{,}02$, $b(x)=0{,}0799x+3{,}75$
b) 19,7 kWh
c) 24,16 €

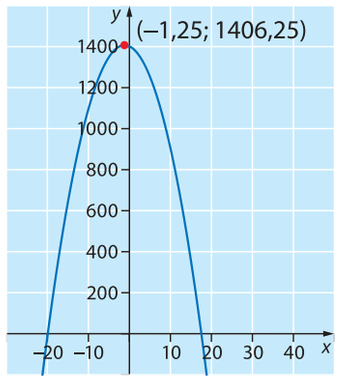
**31.** a) $f(x)=0{,}32x-800$
b) 12 544,07 €
c) 25,5 %

**32.** a) 5,0 m b) 5,0 m
c) $x=0{,}5$ d) ei mahdu

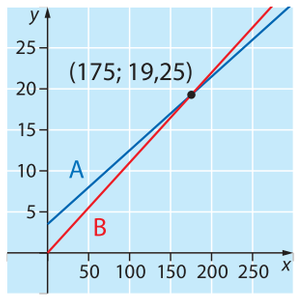
**33.** a) 37,5 m ≈ 38 m
b) 87,5 m ≈ 88 m
c) 44 km/h

**34.** a) 821,28 €
b) 1,50 €

**35.** a) $m(x)=-4x^2-10x+1400$
b) 1296 €
c) 1,88 €

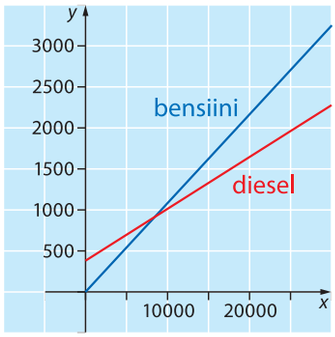



**36.** a) $A(x)=0{,}09x+3{,}50$; $B(x)=0{,}11x$
b) Kannattaa valita liittymä A.




c) Kun puheaika on 175 minuuttia.

**37.** **a)** bensiinikäyttöinen auto: $0{,}108309x$, dieselkäyttöinen auto: $0{,}063288x + 381$




**b)** 8500 km

**38.** 60 makeaa muffinssia, 72 suolaista muffinssia

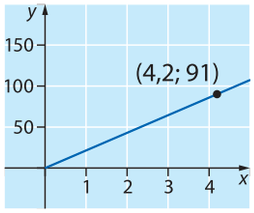
**39.** $a = 3$, $b = -18$

**40.** **a)** 69 W **b)** 170 lx

**c)** $y = \frac{384}{x^2}$, verrannollisuuskerroin 384

**41.** **a)** $y = \frac{65}{3}x$, verrannollisuuskerroin $\frac{65}{3}$

**b)** 91 €



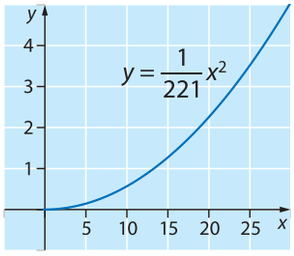

**42.** **a)** 195 litraa

**b)** $y = 0{,}25x$, verrannollisuuskerroin 0,25

**43.** 188 cm = 1,88 m

**44.** **a)** 221 m **b)** 14 m/s

**c)**




**45.** 4,2 %

**46.** 80 km/h

**47.** Axel maksaa 22,50 €.

**48.** 24 %

## 6.3 Monivalintatehtävät

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1.** | c | **21.** | c |
| **2.** | c | **22.** | a |
| **3.** | a | **23.** | b |
| **4.** | b | **24.** | c |
| **5.** | c | **25.** | a |
| **6.** | c | **26.** | c |
| **7.** | c | **27.** | b |
| **8.** | b | **28.** | b |
| **9.** | b | **29.** | c |
| **10.** | a | **30.** | c |
| **11.** | a | **31.** | a |
| **12.** | c | **32.** | c |
| **13.** | c | **33.** | b |
| **14.** | b | **34.** | a |
| **15.** | a | **35.** | a |
| **16.** | c | **36.** | b |
| **17.** | c | **37** | c |
| **18.** | a | **38.** | c |
| **19.** | c | **39.** | a |
| **20.** | b | **40** | c |

# Hakemisto


**A**
asteluku 9

**B**
binomi 10

**E**
ensimmäisen asteen polynomifunktio 42
ensimmäisen asteen yhtälö 31
epälineaarinen yhtälöpari 87

**F**
funktio 42

**H**
huippu 70
hyperbeli 132

**J**
juurrettava 153

**K**
kerroin 9
kääntäen verrannollisuus 132

**L**
lauseke 9
lausekkeen arvo 10
liitäntälaki 13
lineaarinen funktio 42
lineaarinen riippuvuus 42
lineaarinen yhtälöpari 87

**M**
merkitsevät numerot 150
monomi 10
muistikaavat 147
muuttuja 9
muuttujaosa 9

**N**
neliöjuuri 153

**O**
osittelulaki 13

**P**
paraabeli 68
polynomi 9
polynomien kertolasku 22
polynomien yhteenlasku 12

**R**
ratkaisukaava 55
ristiin kertominen 110

**S**
samanmuotoiset termit 11
sijoitusmenetelmä 87
suhde 106
suhdeluku 106
suhteen arvo 106
suoraan verrannollisuus 122
symmetria-akseli 70

**T**
termi 9
toisen asteen polynomifunktio 72
toisen asteen yhtälö 54
trinomi 10
tulon nollasääntö 58

**V**
vakiotermi 9
vastalauseke 11
verrannollisuuskerroin 121, 131
verranto 110
verrantoyhtälö 110

**Y**
yhteenlaskumenetelmä 96
yhtälö 31
yhtälön juuri 31
yhtälön ratkaiseminen 32
yhtälön ratkaisu 31
yhtälöpari 85

TEKIJÄ Lyhyt matematiikka

**Kurssi 2: lausekkeet ja yhtälöt**

# Aikataulusuunnitelma

| | 75 min | 45 min |
|---|---|---|
| **1. Lausekkeilla laskeminen** | | |
| 1.1 Lauseke ja laskutoimitukset | 1 | 2 |
| 1.2 Polynomien tulo | 1 | 1–2 |
| • *Lisämateriaali: Murtolausekkeita* | | |
| • *Lisämateriaali: Muistikaavat* | | |
| **2. Yhtälöitä ja funktioita** | | |
| 2.1 Ensimmäisen asteen yhtälö | 2 | 2 |
| 2.2 Ensimmäisen asteen polynomifunktio | 1 | 1–2 |
| • *Lisämateriaali: Vastauksen tarkkuus* | | |
| 2.3 Toisen asteen yhtälö | 2 | 2–3 |
| • *Lisämateriaali: Neliöjuuri* | | |
| 2.4 Toisen asteen polynomifunktio | 2 | 2–3 |
| **3. Yhtälöpari** | | |
| 3.1 Yhtälöpari ja leikkauspisteet | 1 | 1–2 |
| 3.2 Yhtälöpari sovellustehtävissä | 1–2 | 2 |
| **4. Verrannollisuus** | | |
| 4.1 Suhde ja verranto | 1 | 1 |
| 4.2 Suoraan verrannollisuus | 1–2 | 2 |
| 4.3 Kääntäen verrannollisuus | 1 | 2 |
| **Kertaus** | 1–2 | 2 |
| **Yhteensä** | **15–18** | **20–25** |

# Vinkit tehtäviin

17. a) matka = nopeus · aika

18. a) Kokonaishinta muodostuu käsittelykuluista ja kuvien yhteishinnasta.

19. a) Kokonaiskustannukset muodostuvat kertamaksusta ja vuorokaudessa veloitettavista maksuista (vuorokausivuokra ja kolariturva).

21. Muodosta ensin lauseke suorakulmion korkeudelle. Muista, että suorakulmion vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät.

38. Laske ensin kertolasku. Muista laittaa kertolaskun tulos sulkuihin.

40. Laske ensin yksi kertolasku. Muista laittaa kertolaskun tulos sulkuihin. Suorita vasta sitten toinen kertolasku.

44. a) myyntitulot = hinta · määrä

60. Luonnolliset luvut ovat 1, 2, 3, … . merkitse pienintä luonnollista lukua kirjaimella $x$ ja muodosta lauseke kahdelle seuraavalle luonnolliselle luvulle.

65. Kirjoita kaikki lausekkeet ensin nimittäjien kanssa ja lavenna lausekkeet samannimisiksi.

68. Merkitse Kiiran palkkaa kirjaimella $x$. Muodosta tämän avulla lausekkeet palkasta vähennettäville kustannuksille.

104. Lausekkeen nollakohdissa lausekkeen arvo on nolla.

108. Merkitse pienempää kokonaislukua kirjaimella *x*. Muodosta tämän avulla lauseke seuraavalle kokonaisluvulle.

141. Huippu sijaitsee nollakohtien puolivälissä.

150. myyntitulot = hinta · määrä

153. Suorakulmaisen kolmion kateetin ovat kolmion kanta ja korkeus.

155. Huomioi paidan hinnassa kustannukset ennen kuin muodostat funktiota. Tällöin voitto saadaan hinnan ja määrän tulona.

174. Muodosta yhtälöpari.

177. b) Ratkaise a-kohdassa muodostamasi yhtälöpari

190. Ratkaise yhtälöpari yhteenlaskumenetelmällä ja määritä sitten sopiva vakion *a* arvo.

191. Merkitse kysyttyjä asioita kirjaimilla.

207. Merkitse yhden osakkeen arvoa (€) esimerkiksi kirjaimella *x*.

214. Merkitse tiivisteen ja veden osuutta esimerkiksi kirjaimen *x* avulla annetun suhteen mukaisesti.

222. Merkitse kysyttyä asiaa sopivalla kirjaimella ja muodosta pituuksien suhteet.

236. Merkitse kysyttyä asiaa sopivalla kirjaimella. Muodosta suureiden suhde ja niistä yhtälö esimerkiksi taulukon avulla.

239. Matkan ja ajan suhde on nopeus, joka on tehtävässä vakio.

241. Merkitse kysyttyä asiaa sopivalla kirjaimella.

245. c) Kokoa annetut lähtöarvot ja kirjaimet taulukkoon ja muodosta verranto. Ratkaise tästä kysytty yhtälö. Verrannollisuuskerroin nähdään muodostetusta yhtälöstä.

246. a) Merkitse pituuden muutosta sopivalla kirjaimella ja muodosta verranto.
b) Kokoa annetut lähtöarvot ja kirjaimet taulukkoon ja muodosta verranto. Ratkaise tästä kysytty yhtälö.

251. a) Merkitse punnuksen massaa sopivalla kirjaimella ja muodosta verranto
b) Kokoa annetut lähtöarvot ja kirjaimet taulukkoon ja muodosta verranto. Ratkaise tästä kysytty yhtälö.

257. Merkitse kysyttyä asiaa sopivalla kirjaimella. Muodosta suureiden tulo ja niistä yhtälö esimerkiksi taulukon avulla.

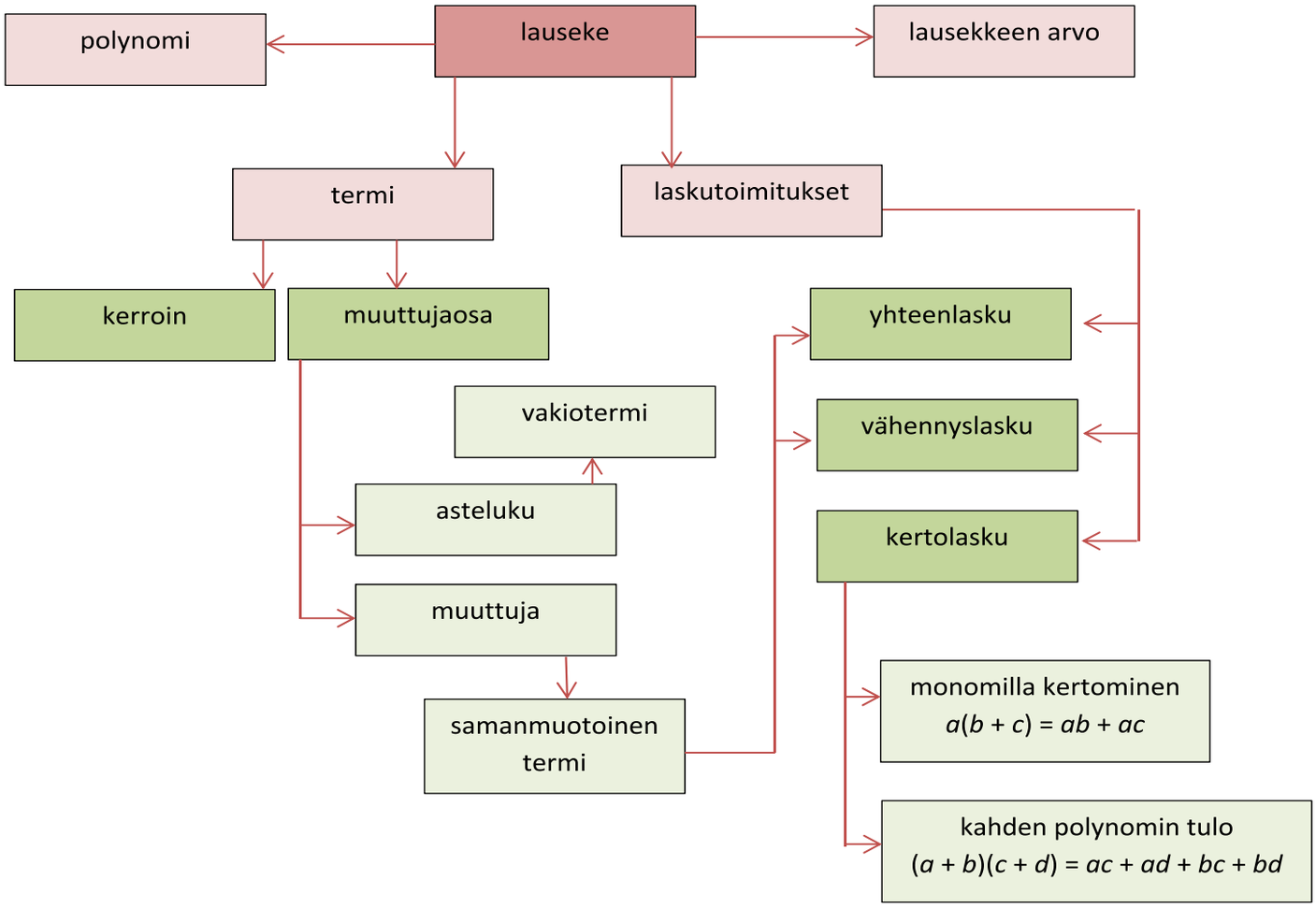
259. Sijoita pisteen koordinaatit yhtälöön. Laske suureiden tulo, joka on vakio.

260. Kääntäen verrannollisten suureiden tulo on vakio

262. Merkitse kysyttyä todennäköisyyttä sopivalla kirjaimella ja muodosta verranto.

264. Merkitse intensiteettiä alussa esimerkiksi $I$. Jos intensiteetti $x$-kertaistuu, niin se on $x \cdot I$.

# 1. Lausekkeilla laskeminen



# 2. Yhtälöitä ja funktioita

polynomi

yhtälö

funktio

nollakohta
$f(x) = 0$

ensimmäisen asteen yhtälö

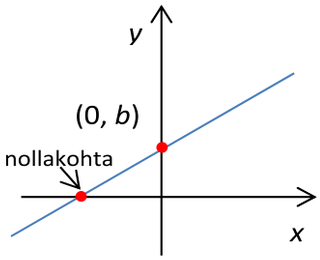
ensimmäisen asteen polynomifunktio
$f(x) = ax + b$

funktion arvojen positiivisuus
$f(x) > 0$

funktion arvojen negatiivisuus
$f(x) < 0$

kuvaajana suora

nimittäjien poistaminen




- $a > 0$: suora on nouseva
- $a < 0$: suora on laskeva
- $a = 0$: suora on $x$-akselin suuntainen

$y$-akselin leikkauspiste: $(0, b)$

toisen asteen yhtälö

toisen asteen polynomifunktio
$f(x) = ax^2 + bx + c$

täydellinen toisen asteen yhtälö
$ax^2 + bx + c = 0$

ratkaisukaava
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

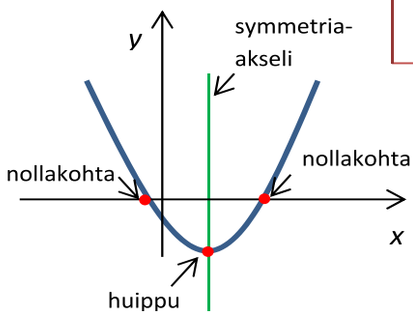
kuvaajana paraabeli

vaillinainen toisen asteen yhtälö

- $a > 0$: ylöspäin aukeava
- $a < 0$: alaspäin aukeava

$ax^2 + bx = 0$

$ax^2 + c = 0$




huippu

yhteisen tekijän erottaminen

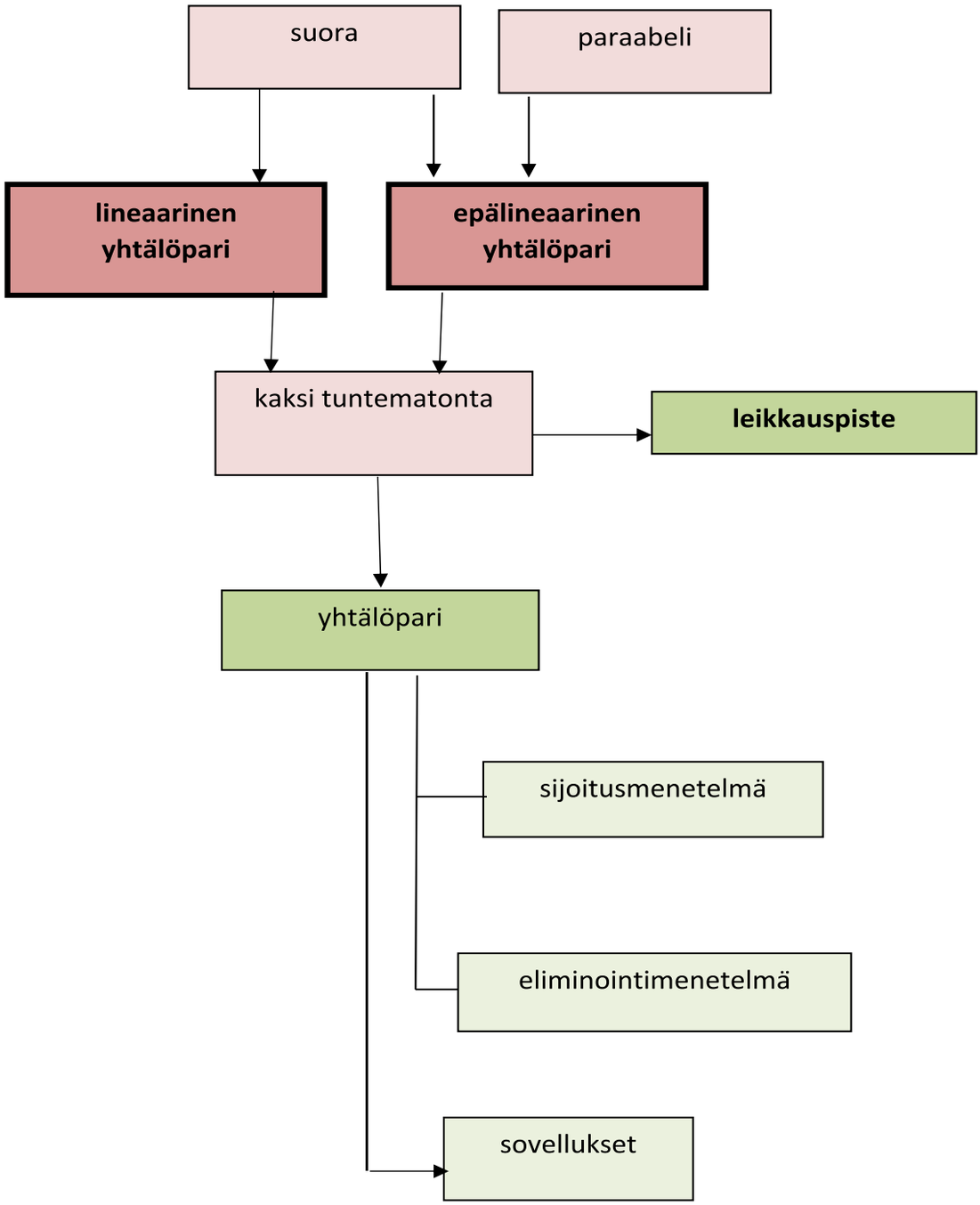
neliöjuuri

maksimipiste/minimipiste

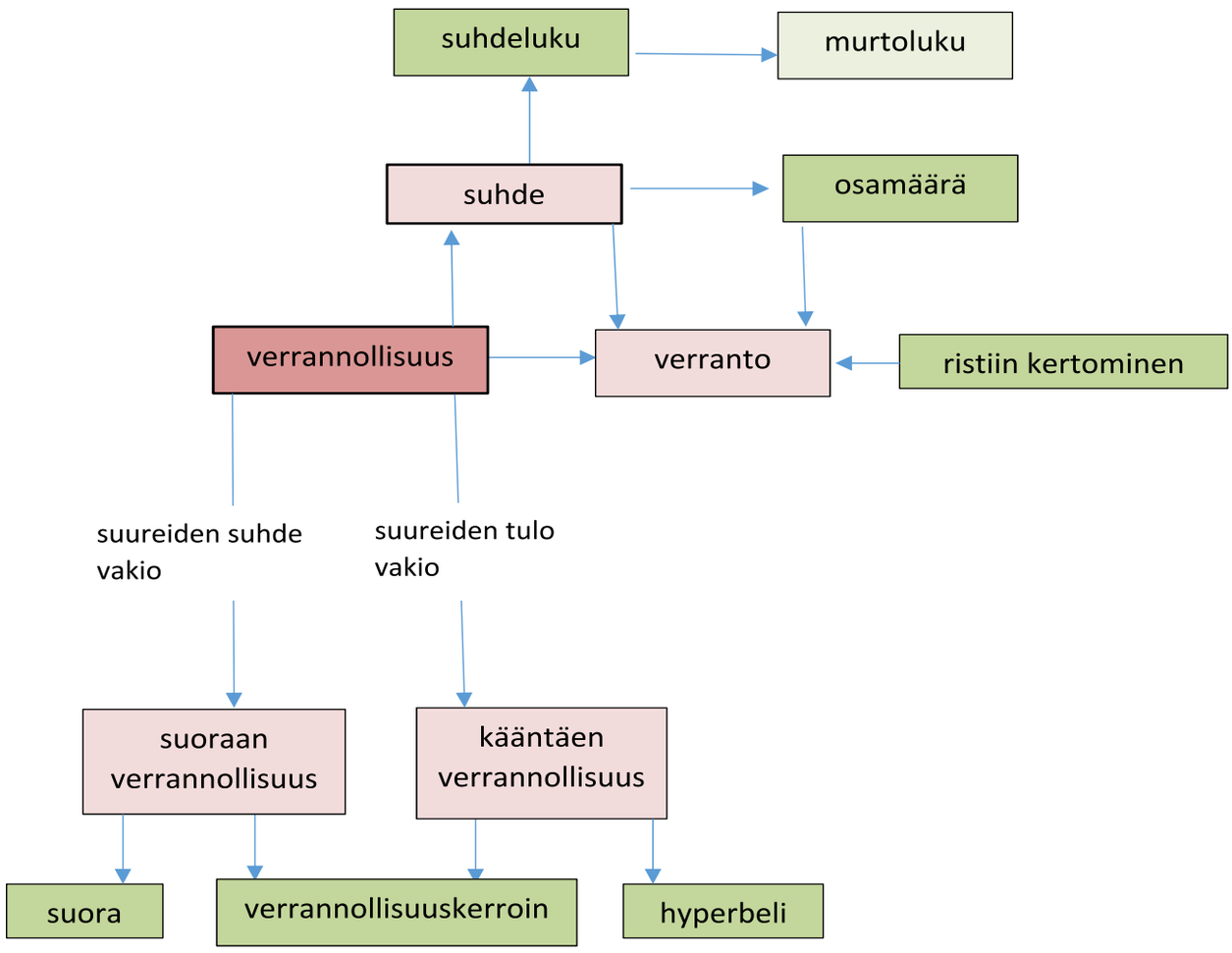
tulon nollasääntö

symmetria-akseli

# 3. Käsitekartta



# 4. Käsitekartta



# Keskeiset asiat 1.1

- polynomin arvon laskeminen
- lausekkeen sieventäminen
  - yhteenlasku
  - vähennyslasku
  - luvulla kertominen
- lausekkeen muodostaminen sanallisessa tehtävässä

# Keskeiset asiat 1.2

- lausekkeen sieventäminen
  - monomilla kertominen
  - kahden polynomin tulo
- lausekkeen muodostaminen sanallisessa tehtävässä
- HUOMAA! Lisämateriaali: Murtolausekkeita ja Muistikaavat

# Keskeiset asiat 2.1

- ensimmäisen asteen yhtälön ratkaiseminen
  - nimittäjien poistaminen
- yhtälön muodostaminen sanallisessa tehtävässä

# Keskeiset asiat 2.2

- suoran kulkusuunnan ja $y$-akselin leikkauspisteen määrittäminen
- funktion arvojen laskeminen
- yhtälöiden muodostaminen ja ratkaiseminen
  - nollakohdan määrittäminen
- kuvaajan piirtäminen
- kuvaajan tulkitseminen
  - funktion arvojen lukeminen
  - yhtälön ratkaiseminen
  - epäyhtälön ratkaiseminen
  - nollakohdan määrittäminen
- matemaattisen mallin käyttäminen ja mallin oikeellisuuden arvioiminen

# Keskeiset asiat 2.3

- täydellisen toisen asteen yhtälön ratkaiseminen ratkaisukaavalla
- vaillinaisten toisen asteen yhtälöiden ratkaiseminen
  - tulon nollasäännön avulla
  - neliöjuuren avulla
- yhteisen tekijän erottaminen

# Keskeiset asiat 2.4

- paraabelin aukeamissuunnan määrittäminen
- paraabelin ja koordinaattiakselien leikkauspisteet
  - $x$-akselin leikkauspiste eli nollakohta
  - $y$-akselin leikkauspiste
- paraabelin huipun sijainti
- symmetria-akselin yhtälön määrittäminen
- funktion kuvaajan tulkinta
  - funktion arvojen määrittäminen tietyillä muuttujan arvoilla
  - yhtälöiden ratkaiseminen kuvaajan avulla
  - epäyhtälöiden ratkaiseminen kuvaajan avulla
- tilanteiden mallintaminen toisen asteen polynomifunktion avulla

# Keskeiset asiat 3.1

- lineaarinen- ja epälineaarinen yhtälöpari
- yhtälöparin ratkaiseminen
  - sijoitusmenetelmällä
  - graafisesti eli kuvaajan avulla
- yhtälöparin ratkaisujen lukumäärä
  - yksi lukupari $(x, y)$
  - kaksi lukuparia
  - ei yhtään ratkaisuja
  - ääretön määrä ratkaisuja
- kahden funktion leikkauspiste ratkaistaan yhtälöparin avulla

# Keskeiset asiat 3.2

- kaksi tuntematonta sisältävän sanallisen tehtävän ratkaiseminen yhtälöparin avulla
  1. Tuntemattomat nimetään kirjaimilla
  2. Muodostetaan kaksi yhtälöä tehtävän lähtöarvojen avulla
  3. Etsitään yksikäsitteinen ratkaisu eli yksi lukupari
- yhtälöparin ratkaiseminen yhteenlasku- eli eliminointimenetelmällä

# Keskeiset asiat 4.1

- kahden luvun tai suureen osamäärä eli suhde
  - suhteen avulla yhtälön muodostaminen
  - kahden suhteen yhtäsuuruus, jolloin muodostuu verrantoyhtälö
- verrantoyhtälöiden ratkaiseminen
  - mekaaniset verrantoyhtälöt
  - sanalliset sovellukset

# Keskeiset asiat 4.2

- kahden suureen verrannollisuus
  - jos suureiden suhde on aina vakio, suureet ovat suoraan verrannollisia
  - suoraan verrannollisen riippuvuuden kuvaaja on suora
- sovellusten ratkaiseminen
  - tehtävästä etsitään, mitkä kaksi suuretta ovat suoraan verrannolliset
  - tehtävän selkiyttämiseksi annetuista tiedoista voi muodostaa taulukon
  - muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan se

# Keskeiset asiat 4.3

- kahden suureen verrannollisuus
  - jos suureiden tulo on aina vakio, suureet ovat kääntäen verrannollisia
  - kääntäen verrannollisen riippuvuuden kuvaaja on hyperbeli
- sovellusten ratkaiseminen
  - tehtävästä etsitään, mitkä kaksi suuretta ovat kääntäen verrannolliset
  - tehtävän selkiyttämiseksi, annetuista tiedoista voi muodostaa taulukon
  - muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan se

# Keskeiset asiat 1.1

- polynomin arvon laskeminen
- lausekkeen sieventäminen
  - yhteenlasku
  - vähennyslasku
  - luvulla kertominen
- lausekkeen muodostaminen sanallisessa tehtävässä

# Keskeiset asiat 1.2

- lausekkeen sieventäminen
  - monomilla kertominen
  - kahden polynomin tulo
- lausekkeen muodostaminen sanallisessa tehtävässä
- HUOMAA! Lisämateriaali: Murtolausekkeita ja Muistikaavat

# Keskeiset asiat 2.1

- ensimmäisen asteen yhtälön ratkaiseminen
  - nimittäjien poistaminen
- yhtälön muodostaminen sanallisessa tehtävässä

# Keskeiset asiat 2.2

- suoran kulkusuunnan ja $y$-akselin leikkauspisteen määrittäminen
- funktion arvojen laskeminen
- yhtälöiden muodostaminen ja ratkaiseminen
  - nollakohdan määrittäminen
- kuvaajan piirtäminen
- kuvaajan tulkitseminen
  - funktion arvojen lukeminen
  - yhtälön ratkaiseminen
  - epäyhtälön ratkaiseminen
  - nollakohdan määrittäminen
- matemaattisen mallin käyttäminen ja mallin oikeellisuuden arvioiminen

# Keskeiset asiat 2.3

- täydellisen toisen asteen yhtälön ratkaiseminen ratkaisukaavalla
- vaillinaisten toisen asteen yhtälöiden ratkaiseminen
  - tulon nollasäännön avulla
  - neliöjuuren avulla
- yhteisen tekijän erottaminen

# Keskeiset asiat 2.4

- paraabelin aukeamissuunnan määrittäminen
- paraabelin ja koordinaattiakselien leikkauspisteet
  - $x$-akselin leikkauspiste eli nollakohta
  - $y$-akselin leikkauspiste
- paraabelin huipun sijainti
- symmetria-akselin yhtälön määrittäminen
- funktion kuvaajan tulkinta
  - funktion arvojen määrittäminen tietyillä muuttujan arvoilla
  - yhtälöiden ratkaiseminen kuvaajan avulla
  - epäyhtälöiden ratkaiseminen kuvaajan avulla
- tilanteiden mallintaminen toisen asteen polynomifunktion avulla

# Keskeiset asiat 3.1

- lineaarinen- ja epälineaarinen yhtälöpari
- yhtälöparin ratkaiseminen
  - sijoitusmenetelmällä
  - graafisesti eli kuvaajan avulla
- yhtälöparin ratkaisujen lukumäärä
  - yksi lukupari $(x, y)$
  - kaksi lukuparia
  - ei yhtään ratkaisuja
  - ääretön määrä ratkaisuja
- kahden funktion leikkauspiste ratkaistaan yhtälöparin avulla

# Keskeiset asiat 3.2

- kaksi tuntematonta sisältävän sanallisen tehtävän ratkaiseminen yhtälöparin avulla
  1. Tuntemattomat nimetään kirjaimilla
  2. Muodostetaan kaksi yhtälöä tehtävän lähtöarvojen avulla
  3. Etsitään yksikäsitteinen ratkaisu eli yksi lukupari
- yhtälöparin ratkaiseminen yhteenlasku- eli eliminointimenetelmällä

# Keskeiset asiat 4.1

- kahden luvun tai suureen osamäärä eli suhde
  - suhteen avulla yhtälön muodostaminen
  - kahden suhteen yhtäsuuruus, jolloin muodostuu verrantoyhtälö
- verrantoyhtälöiden ratkaiseminen
  - mekaaniset verrantoyhtälöt
  - sanalliset sovellukset

# Keskeiset asiat 4.2

- kahden suureen verrannollisuus
  - jos suureiden suhde on aina vakio, suureet ovat suoraan verrannollisia
  - suoraan verrannollisen riippuvuuden kuvaaja on suora
- sovellusten ratkaiseminen
  - tehtävästä etsitään, mitkä kaksi suuretta ovat suoraan verrannolliset
  - tehtävän selkiyttämiseksi annetuista tiedoista voi muodostaa taulukon
  - muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan se

# Keskeiset asiat 4.3

- kahden suureen verrannollisuus
  - jos suureiden tulo on aina vakio, suureet ovat kääntäen verrannollisia
  - kääntäen verrannollisen riippuvuuden kuvaaja on hyperbeli
- sovellusten ratkaiseminen
  - tehtävästä etsitään, mitkä kaksi suuretta ovat kääntäen verrannolliset
  - tehtävän selkiyttämiseksi, annetuista tiedoista voi muodostaa taulukon
  - muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan se